Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 9. hét

1. Számoljuk ki a következő függvények parciális deriváltjait!

   a) $f(x,y)=\dfrac{x^2e^{x+y^2}}{2x^2+1}+\ln(x^4+1)+(2y+1)^6$ b) $f(x,y)=x^3-3xy^2+2x-5y+\ln 2$

2. Legyen $f(x,y)=\sqrt{5(x-1)^4+4y^2}$. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket! (Az $(1,0)$ pontban használjuk a definíciót.)

3. Legyen $f(x,y)=(2x-y)^4+4x^3-8y^2$. Számoljuk ki az első és másodrendű parciális deriváltakat! Hol deriválható (totálisan) a függvény? Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(1,2)$?

4. Legyen $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2}+6x+3y, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$ Mivel egyenlő $f'_x(x,y)$ és $f'_y(x,y)$? Hol differenciálható (totálisan) f?

5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$ Folytonos-e f az origóban?

   b) $f'_x(0,0)=?$ (Használjuk a definíciót!)

   c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

6. Adott az $f(x,y,z)=x^3+y^4+x^2ye^{2z}$ függvény. Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(-1,1,0)$? Miért létezik? $f'''_{xxz}=?$ $f'''_{xzx}=?$

7. Írjuk fel $f(x,y)=(2x-y)^2+4x^2-8y$ függvény $P_0(1,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

8. Írjuk fel az $f(x,y,z)=x^2y+yz-5z^2$ függvény gradiensét! Miért létezik a gradiens? Számítsuk ki az f függvény $P_0(0,10,1)$ pontbeli $\mathbf{v}=(-3,4,0)$ irányú deriváltját!

9. Adott az $f(x,y)=3y+e^{xy^2}-2y\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ függvény és a $P_0(0,1)$ pont.

   a) $f'_x(x,y)=?$; $f'_y(x,y)=?$, ha $y\neq 0$

   b) Írjuk fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

   c) Mennyi az f függvény P_0 pontbeli $\mathbf{v}=(2,-7)$ irányú deriváltja?

   d) Adjuk meg az f függvény P_0 pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát (minimumát), és adjuk meg a maximumhoz (minimumhoz) tartozó irányt.

10. Az $f(x,y)=\dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

11. Legyen $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-3y^2}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ -3 & \text{egyébként.}\end{cases}$

    a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$ Folytonos-e f az origóban?

    b) $f'_x(x,y)=?$ $f'_y(x,y)=?$ (Az origóban használjuk a definíciót!)

    c) Mennyi az f függvény $(1,-1)$ pontbeli $\mathbf{v}=(-5,1)$ irányú deriváltja?

    d) Adjuk meg az f függvény $(1,-1)$ pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát és minimumát!

    e) Írjuk fel az f függvény $(1,-1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!