Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 9. hét

1. Számoljuk ki a következő függvények parciális deriváltjait!

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2e^{x+y^2}}{2x^2+1}+\ln(x^4+1)+(2y+1)^6$ b) $f(x,y)=x^3-3xy^2+2x-5y+\ln 2$

Megoldás a)

$$f'_x(x,y)=\frac{\left(2xe^{x+y^2}+x^2e^{x+y^2}\right)(2x^2+1)-4x\cdot x^2e^{x+y^2}}{(2x^2+1)^2}+\frac{4x^3}{x^4+1},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{x^2e^{x+y^2}\cdot 2y}{2x^2+1}+6(2y+1)^5\cdot 2.$$

b)

$$f'_x(x,y)=3x^2-3y^2+2,\qquad f'_y(x,y)=-6xy-5.$$

2. Legyen $f(x,y)=\sqrt{5(x-1)^4+4y^2}$. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket! (Az $(1,0)$ pontban használjuk a definíciót.)

Megoldás Legyen $(x,y)\neq(1,0)$. Ekkor az egyváltozós deriválási szabályok alapján:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{2}\left(5(x-1)^4+4y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 20(x-1)^3,\qquad f'_y(x,y)=\frac{1}{2}\left(5(x-1)^4+4y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8y.$$

Látható, hogy az $x\mapsto\sqrt{x}$ függvényre vonatkozó szabály miatt az $(x,y)=(1,0)$ pontban nem alkalmazhatjuk ezt a megoldási módszert. Így az egyváltozós függvény deriváltjának definícióját alkalmazzuk:

$$f'_x(1,0)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5(x-1)^4}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5}(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt{5}(x-1)=0;$$

$$f'_y(1,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\sqrt{4y^2}}{y}=\lim_{y\to0}\frac{2|y|}{y}.$$

Ez a határérték (és így a megfelelő parciális derivált) nem létezik, pontosabban $\lim\limits_{y\to0+0}\frac{2|y|}{y}=2$ és $\lim\limits_{y\to0-0}\frac{2|y|}{y}=-2$.

3. Legyen $f(x,y)=(2x-y)^4+4x^3-8y^2$. Számoljuk ki az első és másodrendű parciális deriváltakat! Hol deriválható (totálisan) a függvény? Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(1,2)$?

Megoldás

$$f'_x(x,y)=4(2x-y)^3\cdot2+12x^2;\qquad f'_y(x,y)=-4(2x-y)^3-16y;\qquad f''_{xx}(x,y)=48(2x-y)^2+24x;$$

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}=-24(2x-y)^2;\qquad f''_{yy}(x,y)=12(2x-y)^2-16.$$

Mivel az elsőrendű parciális deriváltak minden pontban folytonosak, így a függvény mindenhol totálisan deriválható.

$$(\operatorname{grad} f)(1,2)=(f'_x(1,2),f'_y(1,2))=(12,-32).$$

4. Legyen $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2}+6x+3y, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 \text{ egyébként.}\end{cases}$ Mivel egyenlő $f'_x(x,y)$ és $f'_y(x,y)$?

Hol differenciálható (totálisan) f?

Megoldás Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$f'_x(x,y) = \frac{y^2 \cdot (x^2+y^2) - (x-2)y^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + 6,$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y(x-2) \cdot (x^2+y^2) - (x-2)y^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + 3.$$

A $(0,0)$ pontban a definíciót használjuk:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{6x-0}{x-0} = 6; \qquad \lim_{y\to 0} \frac{(-2+3y)-0}{y-0},$$

ahol az utóbbi határérték nem létezik. Látható, hogy f parciális deriváltjai minden $(x,y) \neq (0,0)$ pontban folytonosak, így ezekben a pontokban f totálisan deriválható. Másrészt a $(0,0)$ pontban még y szerint sem deriválható, így nem totálisan deriválható.

5. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$? Folytonos-e f az origóban?

   b) $f'_x(0,0) =$? (Használjuk a definíciót!)

   c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

Megoldás a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{y^2+2x^2} \cdot \sqrt{y^2+2x^2}$. Vegyük észre, hogy ha $(x,y) \to (0,0)$, akkor $y^2+2x^2 \to 0$. Így alkalmazhatjuk a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket, ami alapján $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \cdot 0 = 0 = f(0,0)$, tehát f folytonos $(0,0)$-ban.
b) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x^2)}{\sqrt{2x^2}} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)}{2x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}|x|}{x}$. Mivel az első tényezőnek a határértéke 1, a második tényezőnek nincs határértéke, így a parciális derivált nem létezik.
c) Az előző észrevétel miatt a függvény nem totálisan deriválható az origóban.

6. Adott az $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + x^2ye^{2z}$ függvény. Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(-1,1,0)$? Miért létezik? $f'''_{xxz} =$? $f'''_{xzx} =$?

Megoldás A parciális deriváltak $f'_x(x,y,z) = 3x^2 + 2xye^{2z}$, $f'_y(x,y,z) = 4y^3 + x^2e^{2z}$, $f'_z(x,y,z) = x^2y \cdot 2e^{2z}$. Mivel ezek léteznek a $(-1,1,0)$ pontban, f-nek létezik a gradiense is ebben a pontban. A definíció alapján: $(\operatorname{grad} f)(-1,1,0) = (f'_x(-1,1,0), f'_y(-1,1,0), f'_z(-1,1,0)) = (1,5,2)$. A parciális deriválás definíciója alapján: $f'''_{xxz}(x,y,z) = f'''_{xzx}(x,y,z) = 4ye^{2z}$.

7. Írjuk fel az $f(x,y) = (2x-y)^2 + 4x^2 - 8y$ függvény $P_0(1,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás A $z = f(x,y)$ függvény felírható, mint az $f(x,y) - z = 0$ egyenlettel adott $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ függény egy szintfelülete. A tanultak szerint az érintősík egy normálvektora $\operatorname{grad} F$ értéke a megadott $(1,2,f(1,2)) = (1,2,-12)$ pontban. A gradiens $\operatorname{grad} F = (16x - 4y, -4x + 2y - 8, -1)$, ami a megadott pontban $\vec{N} = (\operatorname{grad} F)(1,2,-12) = (8,-8,-1)$. Így az érintősík egyenlete $8(x-1) - 8(y-2) - (z+12) = 0$, azaz $8x - 8y - z = 4$.

8. Írjuk fel az $f(x,y,z) = x^2y + yz - 5z^2$ függvény gradiensét! Miért létezik a gradiens? Számítsuk ki az f függvény $P_0(0,10,1)$ pontbeli $\vec{v} = (-3,4,0)$ irányú deriváltját!

Megoldás A gradiens $\text{grad} f = (2xy, x^2 + z, y - 10z)$; azért létezik, mert a függvénynek minden pontban léteznek a parciális deriváltjai. Látható, hogy f parciális deriváltjai minden pontban folytonosak is, így f totálisan deriválható is minden pontban. Így az iránymenti derivált kiszámítására alkalmazható a tanult képlet. Először keressük meg a megadott irányú egységvektort: $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-3,4,0)}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$. Kell a gradiens értéke a megadott pontban: $(\text{grad} f)(0, 10, 1) = (0, 1, 0)$. Az iránymenti derivált értéke $(\text{grad} f)(0, 10, 1) \cdot \vec{e} = \frac{4}{5}$.

9. Adott az $f(x, y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ függvény és a $P_0(0, 1)$ pont.
   a) $f'_x(x, y) =?$; $f'_y(x, y) =?$, ha $y \neq 0$.
   b) Írjuk fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!
   c) Mennyi az f függvény P_0 pontbeli $\vec{v} = (2, -7)$ irányú deriváltja?
   d) Adjuk meg az f függvény P_0 pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát (minimumát), és adjuk meg a maximumhoz (minimumhoz) tartozó irányt.

Megoldás a) $f'_x(x, y) = y^2 e^{xy^2} - 2y \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = y^2 e^{xy^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2}$, és $f'_y(x, y) = 3 + 2xye^{xy^2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2y \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 3 + 2xye^{xy^2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$. b) Az előző feladat eredménye alapján $f'_x(0, 1) = -1$, és $f'_y(0, 1) = 3$. Másrészt $f(0, 1) = 4$. Tehát az érintősík: $-(x - 0) + 3(y - 1) - (z - 4) = 0$, azaz $x - 3y + z = 1$. c) A P_0 pontban f parciális deriváltjai folytonosak, tehát itt f totálisan deriválható. Így alkalmazható az előadáson tanult képlet. A megadott irányú egységvektor $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{-7}{\sqrt{53}}\right)$. A gradiens értéke a megadott pontban $(\text{grad} f)(P_0) = (-1, 3)$. Tehát az iránymenti derivált $f'_e(0, 1) = (\text{grad} f)(0, 1) \cdot \vec{e} = \frac{-23}{\sqrt{53}}$. d) Az előadáson megbeszéltek alapján totálisan deriválható függvény esetén az iránymenti derivált értéke a gradiens irányában maximális, az azzal ellentétes irányban pedig minimális. A maximális/minimális érték pedig $|(\text{grad} f)(P_0)| = \sqrt{10}$ és $-|(\text{grad} f)(P_0)| = -\sqrt{10}$.

10. Az $f(x, y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

Megoldás A csepp arra fog elindulni, amelyik irányban a függvény értéke a legnagyobb mértékben csökken, tehát a minimális iránymenti derivált irányába. Az előadáson tanultak szerint ez éppen a függvény adott pontbeli gradiensével ellentétes irány. Számoljuk ki a gradienst: $(\text{grad} f)(x, y) = (-2y^3 e^{-2x-1}, 3y^2 e^{-2x-1})$, azaz $(\text{grad} f)\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (-2, 3)$. Így a csepp a $(2, -3)$ vektor által kijelölt irányban fog elindulni. Az adott pontban a maximális meredekség a gradiens abszolút értéke, ami $\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

11. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-3y^2}{2x^2+y^2}, \text{ ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ -3 \text{ egyébként.} \end{cases}$
   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) =?$ Folytonos-e f az origóban?
   b) $f'_x(x, y) =?$ $f'_y(x, y) =?$ (Az origóban használjuk a definíciót!)
   c) Mennyi az f függvény $(1, -1)$ pontbeli $\vec{v} = (-5, 1)$ irányú deriváltja?
   d) Adjuk meg az f függvény $(1, -1)$ pontbeli deriváltjának maximumát és minimumát!
   e) Írjuk fel az f függvény $(1, -1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2-3y^2}{2x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Hasonlóan $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3$. Mivel a két határérték különböző, így f-nek nincs határértéke $(0,0)$-ban, tehát nem folytonos.

b) Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(2x^2+y^2) - 4x(x^2-3y^2)}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{14xy^2}{(2x^2+y^2)^2}; \qquad f'_y(x,y) = \frac{-14x^2y}{(2x^2+y^2)^2}.$$

Másrészt,

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{-3y^2}{y^2}+3}{y} = 0; \qquad f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2x^2}+3}{x},$$

ahol az utóbbi határérték nem létezik, azaz f nem deriválható x szerint a $(0,0)$ pontban.

c) Az $(1,-1)$ pontban, a parciális deriváltak folytonossága miatt f totálisan deriválható. $\vec{e} = \left(\frac{-5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$. Másrészt $(\mathrm{grad} f)(1,-1) = \left(\frac{14}{9}, \frac{14}{9}\right)$. Így az iránymenti derivált $f'_e(1,-1) = -\frac{56}{9\sqrt{26}}$.

d) A maximum $|(\mathrm{grad} f)(1,-1)| = \frac{14\sqrt{2}}{9}$, és a minimum $-\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

e) Mivel $f(1,-1) = -\frac{2}{3}$, az érintősík egyenlete $\frac{14}{9}(x-1) + \frac{14}{9}(y+1) - \left(z+\frac{2}{3}\right) = 0$, azaz $\frac{14}{9}x + \frac{14}{9}y - z = \frac{2}{3}$.