

## A Laplace-transzformált definíciója

Az  $f(t)$  függvény Laplace-transzformáltja:  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ .

Tétel: Ha  $f(t)$  szakaszonként folytonos, és alkalmas  $M, \alpha \in \mathbb{R}$ -el  $f(t) < Me^{\alpha t}$ , akkor  $f(t)$ -nek létezik Laplace-transzformáltja.

## A Laplace-transzformáció tulajdonságai

Jelölje  $f(t)$  Laplace-transzformáltját  $F(s)$ . Ekkor:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = aF(s) + bG(s) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a)$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{\infty} F(r) dr$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

## Néhány alapfüggvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin(at)\}(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos(at)\}(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \sin(at)\}(s) = \frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \cos(at)\}(s) = \frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sh}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\text{ch}(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$(n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R})$$

$$\left( \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$