Matematika A2c elméleti kérdései

2023. ősz

Lineáris algebra

Vektortér

Vektortérnek nevezünk egy V halmazt, ahol értelmezett az összeadás és a skalárral való szorzás művelet a következő tulajdonságokkal:
Minden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v} \in V$ elemre

- $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ (kommutativitás),
- $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ (asszociativitás),
- létezik $\mathbf{0} \in V$ nullvektor, melyre: $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$,
- minden $\mathbf{v} \in V$ elemnek létezik $-\mathbf{v}$ ellentettje, melyre $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Továbbá minden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in V$ elemre és $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ valós számra

- $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{v} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{v})$,
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$,
- $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} + \lambda_2\mathbf{v}$ (disztributivitás),
- $\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$ (disztributivitás).

Lineáris kombináció

A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan kombinációja $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valós számok.

Lineáris összefüggőség

A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan összefüggenek, ha vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számok úgy, hogy $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ és a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számok nem mindegyike 0.

Lineáris függetlenség

A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Generátorrendszer

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok a V vektortér generátorrendszere, ha minden $\mathbf{v} \in V$ vektor előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Bázis

A lineárisan független generátorrendszert bázisnak nevezzük.

Vektorrendszerek elemszáma

Egy n dimenziós térben ha

- k darab lineárisan független vektor van, akkor $k \leq n$.
- k darab vektor generátorendszert alkot, akkor $k \geq n$.
- k darab vektor bázist alkot, akkor $k = n$.

Altér

A V vektortér egy W részhalmaza altér, ha teljesül a következő két feltétel: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W$ esetén $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W$ és $\mathbf{v} \in W, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\mathbf{v} \in W$.

Generált altér

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok által generált altér azon vektorokból áll, melyek előállnak $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineáris kombinációjaként.
Jelölése: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Homogén egyenletrendszer

Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer homogén, ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
Ilyenkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mindig megoldás. Továbbá, ha $\mathbf{x}$ megoldás, akkor $\lambda\mathbf{x}$ is.

Mátix rangja
Egy mátrix rangja a benne található lineárisan független oszlopvektorok maximális száma. Ez ugyanannyi, mint a benne található lineárisan független sorvektorok maximális száma. A legnagyobb méretű nemnulla aldetermináns mérete szintén a mátrix rangjával egyezik meg.

Lineáris egyenletrendszerek megoldásának mátrixrangos vizsgálata
Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg (ahol $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$), ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja megegyezik ($\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$).
A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja egymással és az ismeretlenek számával is megegyezik ($\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$).
Ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, akkor $n - \mathrm{r}(\mathbf{A})$ változó tetszőlegesen megválasztható (szabad paraméter).

Kifejtési tétel
Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát kiszámíthatjuk a következő formulák segítségével (sor, illetve oszlop szerinti kifejtés):

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$

ahol $A_{i,j}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát.

Sor- és oszlopműveletek használhatósága
- egyenletrendszer megoldása (csak sorműveletek!)
- inverz számolása (egyik módszer) (csak sorműveletek!)
- mátrixok rangjának meghatározása
- determináns kiszámítása
  - csere: (-1)-es szorzó
  - sor/oszlop szorzásánál ki kell emelni a szorzót

Inverz mátrix
A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverze az a $\mathbf{A}^{-1}$-gyel jelölt mátrix, melyre $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$ és $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Inverz mátrix létezésének feltétele
A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem 0.

Inverz mátrix kiszámítása
Ha az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, akkor az inverzének i-edik sorának j-edik eleme:

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{j,i} / \det(\mathbf{A}),$$

ahol $A_{j,i}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik sorának és i-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát.
Az inverz kiszámolására másik módszer a Gauss-elimináció.

Lineáris transzformáció
Egy $\mathcal{L} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés lineáris transzformáció, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$-re és $\lambda \in \mathbb{R}$-re teljesül, hogy
- $\mathcal{L}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}) + \mathcal{L}(\mathbf{y})$,
- $\mathcal{L}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{L}(\mathbf{x})$.

Mátrix sajátértéke, sajátvektora
Egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke $\lambda \in \mathbb{R}$, ha van olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, hogy $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Ekkor a $\mathbf{v}$-t a λ-hoz tartozó sajátvektornak nevezzük.

Differenciálegyenletek

Szétválasztható differenciálegyenlet
Az $y' = f(x)g(y)$ alakú differenciálegyenletet szétválasztható változójú differenciálegyenletnek nevezzük.

Lineáris differenciálegyenlet
Az n-edrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

ahol $a_{n-1}, \dots a_1, a_0, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ezt homogénnek nevezzük, ha $f(x) = 0$, különben inhomogénnek.

Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet
Az állandó együtthatós n-edrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x),$$

ahol $a_{n-1}, \dots a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ adott számok és $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldási módszere
Az $y' + g(x)y = f(x)$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásai $y_h(x) + y_p(x)$ alakúak, ahol $y_h(x)$ az $y' + g(x)y = 0$ homogén egyenlet általános megoldása, és $y_p(x)$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, melyet $y_p(x) = c(x)y_0(x)$ alakban keresünk, ahol $y_0(x)$ a homogén egyenlet egy seholsem nulla megoldása.

$$y_h(x) = Ce^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}$$
$$c(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)}\,\mathrm{d}x$$

Differenciálegyenlet iránymezője
A sík minden pontjához hozzárendelünk egy vektort, melyet az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet az adott ponton átmenő megoldása érint (a vektor iránytangense az (x_0, y_0) pontban $f(x_0, y_0)$).

Izoklína
Azon pontok mértani helye a síkon, ahol az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet iránymezője egy adott irányú vektor. Az izoklínák egyenlete $f(x, y) = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Cauchy–Peano-tétel
Ha $D \in \mathbb{R}^2$ és $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, y_0) \in D$ esetén létezik az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

Picard–Lindelöf-tétel
Ha $D \in \mathbb{R}^2$ és $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos, a második változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, y_0) \in D$ esetén létezik az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és ez egyértelmű.

Lipschitz-folytonosság
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, hogy minden $x_1, x_2 \in D_f$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$.

Laplace-transzformált
Egy $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltja az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Elégséges feltétel a Laplace-transzformált létezésére
Ha az $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként folytonos és alkalmas $M, \alpha \in \mathbb{R}$ valós számokkal $f(t) < Me^{\alpha t}$, akkor az f függvénynek létezik a Laplace-transzformáltja.

Többváltozós függvények

Többváltozós függvény határértéke
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény határértéke az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| < \varepsilon$.

Parciális derivált
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ függvény az $a = (a_1, \dots, a_m) \in D_f$ pontban x_i szerint parciálisan deriválható, ha az egyváltozós $f_i\colon x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$ függvény az a_i helyen differenciálható. A

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f_i(x_i) - f_i(a_i)}{x_i - a_i}$$

differenciálhányadost az f függvény x_i szerinti parciális deriváltjának nevezzük.
Jelölése: $f'_{x_i}(a)$ vagy $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

Iránymenti derivált
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ függvény $P_0 \in D_f$ pontbeli $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltján ($|\mathbf{e}| = 1$) a

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|},$$

határértéket értjük, ahol P úgy tart a P_0-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egyenlő állású. A határértéket így is felírhatjuk:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés: $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$.

Gradiens
Ha az n változós $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban mindegyik parciális deriváltja létezik, akkor az f függvény P_0-beli gradiensén a P_0-beli parciális deriváltakból álló n dimenziós vektort értjük: $\operatorname{grad} f(P_0) = (f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \dots, f'_{x_n}(P_0))$.

Jacobi-mátrix
Ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény minden komponensének mindegyik parciális deriváltja létezik valamely $P \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor az f függvény P-beli Jacobi-mátrixán a komponens függvények parciális deriváltjaiból álló mátrixot értjük: az i-edik sorának a j-edik eleme az i-edik komponens függvény j-edik változója szerinti parciális deriváltja.

Többváltozós valós függvény differenciálhatósága
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ többváltozós valós függvényről akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban totálisan differenciálható, ha minden változója szerint parciálisan deriválható $\mathbf{x}_0$-ban és teljesül az

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \varepsilon_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$$

egyenlőség, ahol $\mathbf{A}$ az f Jacobi-mátrixa $\mathbf{x}_0$-ban és $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ esetén $\dfrac{\varepsilon_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \to 0$.

Többváltozós valós függvény differenciálhatóságának elégséges feltétele
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ többváltozós valós függvény az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban totálisan differenciálható, ha $\mathbf{x}_0$ egy környezetében minden változója szerint parciálisan deriválható, és ezek folytonosak $\mathbf{x}_0$-ban.

Többváltozós függvény lokális minimuma
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális minimuma van, ha az $\mathbf{x}_0$ pontnak van olyan D környezete, hogy $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D$ esetén.

Többváltozós függvény lokális maximuma
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális maximuma van, ha az $\mathbf{x}_0$ pontnak van olyan D környezete, hogy $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D$ esetén.

Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltétel
Ha a kétváltozós valós függvénynek valamely pontban lokális szélsőértéke van, akkor abban a pontban létező parciális deriváltjai 0-k.

Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó elégséges feltétel
Ha az (x_0, y_0) pont valamely környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

akkor az $f(x, y)$ függvénynek lokális szélsőértéke van az (x_0, y_0) pontban. Ez a lokális szélsőérték minimum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, és maximum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Kétváltozós függvény nyeregpontra vonatkozó elégséges feltétel
Ha az (x_0, y_0) pont valamely környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0,$$

akkor az $f(x, y)$ függvénynek nincs lokális szélsőértéke az (x_0, y_0) pontban (nyeregpont).

Kettős integrál transzformációjára vonatkozó tétel
Legyen $f(x, y)$ a síkbeli V tartományon integrálható függvény. Ha $x = x(u, v)$ és $y = y(u, v)$ az u és a v szerint parciálisan deriválható olyan függvények, amelyek a V tartomány pontjai és az (u, v) számpárok bizonyos W halmaza között (az x, y legfeljebb véges számú értékének kivételével) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek, akkor

$$\iint_V f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_W f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v,$$

ahol a Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Hármas integrál transzformációjára vonatkozó tétel
Legyen $f(x, y, z)$ a térbeli V tartományon integrálható függvény. Az $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ és $z = z(u, v, w)$ az u, v és a w szerint parciálisan deriválható olyan függvények, amelyek a V tartomány pontjai és az (u, v, w) számhármasok bizonyos W halmaza között (az x, y, z legfeljebb véges számú értékének kivételével) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek. Ekkor az f függvény hármas integrálja kifejezhető a következőképpen

$$\iiint_V f(x, y, z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_W f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w,$$

ahol a Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Sorok

Hatványsor
A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ alakú sort x_0 középpontú hatványsornak mondjuk.

Konvergenciatartomány
Egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának azt a halmazt nevezzük, melynek x elemeire a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sor konvergens.

Cauchy–Hadamard-tétel
A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara: $r = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, akkor $r = \infty$, míg ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, akkor $r = 0$.
A hatványsor az $(a-r, a+r)$ intervallumban konvergens, az $[a-r, a+r]$ intervallumon kívül divergens.

Taylor-sor
Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli Taylor-sora a következő hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots .$$

Taylor-polinom
Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli N-edfokú Taylor-polinomja a következő polinom:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N.$$

Fourier-sor
Egy $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény 2π szerint periodikusan kiterjesztett függvény Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

ahol

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dirichlet-tétel
Ha a 2π szerint periodikus f függvény integrálható $[-\pi, \pi]$-n, és ez felbontható véges sok intervallumra, melyeken a függvény monoton, és a végpontokban végesek a megfelelő oldali határértékek, akkor az f Fourier-sora pontonként konvergens, és az összeg minden pontban a függvény jobb és bal oldali határértékének számtani közepe.