

Pótpótzh megoldása

1. A determináns: $12 + 0 + 2 - 12 - 4 - 0 = -2$.

aldeterminánsok:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

transzponálás:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -10 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

sakktábla:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

determinánssal osztás:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3/2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ugyanez Gauss-eliminációval:

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_2/2 \\ \sim \\ s_1 \leftrightarrow s_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -3/2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_2 - s_3 \\ \sim \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -3/2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_3 + 5s_2 \\ \sim \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3/2 & -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_1 - 2s_2 \\ \sim \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3/2 & -4 \end{array} \right] \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 11 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & a & -1 \\ 2 & 5 & 2 & 11 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & a-6 & -22 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_3/(-1) \\ \sim \\ s_2 \leftrightarrow s_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & a-6 & -22 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_3 + 8s_2 \\ \sim \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+10 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

Ha $a = -10$, akkor nincs megoldás. Ha $a \neq -10$, akkor egyértelmű a megoldás. Az $a = -9$ esetben:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_1 - 2s_3 \\ \sim \\ s_2 - 2s_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_1 - 3s_2 \\ \sim \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Tehát $x = 6, y = -1, z = 2$.

3.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - 3 + 6 - 6(2-\lambda) + 3(2-\lambda) - (1-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

így a sajátértékek 0, 1, 4. Sajátvektorok:

$$\lambda = 0: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \\ x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}$$

$$\lambda = 1: \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}$$

$$\lambda = 4: \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 3x \\ 3x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}$$

4. Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, így először a homogén egyenletet oldjuk meg, melynek megoldása:

$$y = \pm e^{-\int -\frac{2}{x} dx} = \pm e^{2 \ln|x| + C} = C' x^2, \quad C' \in \mathbb{R}$$

Az inhomogént az állandók variálásának módszerével oldjuk meg:

$$C(x) = \int \frac{x^2 \sin x}{x^2} dx = -\cos x + C$$

Ezzel az általános megoldás:

$$y = (C - \cos x)x^2 \quad C \in \mathbb{R}$$

5. Ez egy állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Először a homogén részt oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, melynek gyökei 1 és -3 , így a homogén általános megoldása:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

Az inhomogén tag egyben megoldás is (külső rezonancia), így az $y = axe^x$ próbafüggvény, melyet az egyenletbe helyettesítve:

$$a(x+2)e^x + 2a(x+1)e^x - 3axe^x = e^x,$$

amiből $a = \frac{1}{4}$, és ezzel az általános megoldás:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} x e^x$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= C_1 + C_2 + 0 & \Rightarrow C_1 + C_2 &= 2 \\ 1 = y'(0) &= C_1 - 3C_2 + \frac{1}{4} & \Rightarrow C_1 - 3C_2 &= \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

Amiből $C_1 = \frac{27}{16}$ és $C_2 = \frac{5}{16}$. Így a keresett megoldás:

$$y(x) = \frac{27}{16} e^x + \frac{5}{16} e^{-3x} + \frac{1}{4} x e^x$$

Ugyanez Laplace-transzformációval:

A transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned} s^2 Y - 2s - 1 + 2(sY - 2) - 3Y &= \frac{1}{s-1} \\ (s^2 + 2s - 3)Y &= \frac{1}{s-1} + 2s + 5 = \frac{2s^2 + 3s - 4}{s-1} \\ Y &= \frac{2s^2 + 3s - 4}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} \\ 2s^2 + 3s - 4 &= A(s^2 + 2s - 3) + B(s+3) + C(s^2 - 2s + 1) \end{aligned}$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} 2 &= A + C \\ 3 &= 2A + B - 2C \\ -4 &= -3A + 3B + C \end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$A = \frac{27}{16}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{5}{16}$$

Ezzel

$$Y = \frac{27}{16} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{5}{16} \frac{1}{s+3}$$

És így a megoldás:

$$y(t) = \frac{27}{16} e^t + \frac{1}{4} t e^t + \frac{5}{16} e^{-3t}$$