Pótzh megoldása

1. A determináns: $0+6+2-0-4-6=-2$.

aldeterminánsok: $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ transzponálás: $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ sakktábla: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ determinánssal osztás: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ugyanez Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2+s_3}{\overset{s_1-s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát a kérdéses mátrix inverze $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Kiszámoljuk a megfelelő mátrix rangját:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{s_3-3s_1 \\ s_4-s_1}}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{o_3-2o_1}{\overset{o_2-3o_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{s_4+s_2}{\overset{s_3-2s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{o_3+o_4}{\overset{o_2+2o_4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel kettő darab egyes maradt, így a rang 2, és így két lineárisan független vektor választható ki.

3.
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda)-6\big) = (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-5)\lambda,$$

így a sajátértékek $0, 2, 5$.

$$\lambda = 0: \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} -3x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$$

$$\lambda = 2: \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} 5x \\ -2x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$$

$$\lambda = 5: \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$$

4. Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet:

$$\int y'y^3 \,\mathrm{d}x = \int xe^{-2x^2} \,\mathrm{d}x$$
$$y^4 = -e^{-2x^2} + C$$
$$y(x) = \pm\sqrt[4]{-e^{-2x^2}+C},$$

ahol $C > 0$. Ha $C \leq 1$, akkor ez csak $\sqrt{-\frac{\ln C}{2}} < x$, illetve $-\sqrt{-\frac{\ln C}{2}} > x$ esetén értelmes ($y(x) \neq 0$ is kell).
A kezdeti feltételből $C = 17$ és az előjel $-$, azaz

$$y(x) = -\sqrt[4]{17 - e^{-2x^2}}$$

5. Ez egy állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Először a homogén részt oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, melynek egyetlen gyöke a 3, ami kétszeres, így a homogén általános megoldása:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Az inhomogén tag miatt a próbafüggvény $y = a\sin x + b\cos x$, melyet az egyenletbe helyetesítve:

$$(-a\sin x - b\cos x) - 6(a\cos x - b\sin x) + 9(a\sin x + b\cos x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -a + 6b + 9a & = & 1 \\ -b - 6a + 9b & = & 0 \end{array}$$

A másodikból $b = \frac{3}{4}a$, amit az elsőbe visszahelyettesítve $a = \frac{2}{25}$ és $b = \frac{3}{50}$. Ezzel az egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{2}{25}\sin x + \frac{3}{50}\cos x$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= C_1 + 0 + 0 + \frac{3}{50} && \Rightarrow \quad C_1 = \frac{47}{50} \\ 3 = y'(0) &= 3C_1 + C_2 + \frac{2}{25} + 0 && \Rightarrow \quad C_2 = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Így a keresett megoldás:

$$y(x) = \frac{47}{50}e^{3x} + \frac{1}{10}xe^{3x} + \frac{2}{25}\sin x + \frac{3}{50}\cos x$$

Ugyanez Laplace-transzformációval:
A transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned} s^2Y - s - 3 - 6(sY - 1) + 9Y &= \frac{1}{s^2+1} \\ (s^2 - 6s + 9)Y &= \frac{1}{s^2+1} + s - 3 = \frac{1 + (s^2+1)(s-3)}{s^2+1} = \frac{s^3 - 3s^2 + s - 2}{s^2+1} \\ Y &= \frac{s^3 - 3s^2 + s - 2}{(s^2+1)(s-3)^2} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{Cs + D}{s^2+1} \\ s^3 - 3s^2 + s - 2 &= A(s-3)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s^2 - 6s + 9) \end{aligned}$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} 1 &= A + C \\ -3 &= -3A + B - 6C + D \\ 1 &= A + 9C - 6D \\ -2 &= -3A + B + 9D \end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$A = \frac{47}{50}, \quad B = \frac{1}{10}, \quad C = \frac{3}{50}, \quad D = \frac{2}{25}$$

Ezzel

$$Y = \frac{\frac{47}{50}}{s-3} + \frac{\frac{1}{10}}{(s-3)^2} + \frac{\frac{3}{50}s + \frac{2}{25}}{s^2+1}$$

És így a megoldás:

$$y(t) = \frac{47}{50}e^{3t} + \frac{1}{10}te^{3t} + \frac{3}{50}\cos t + \frac{2}{25}\sin t$$