1. vizsga megoldásvázlata

1. A determináns: $12+0+2-12-4-0=-2$.

aldeterminánsok: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ transzponálás: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -10 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ sakktábla: $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ determinánssal osztás: $\begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3/2 & -4 \end{bmatrix}$

Ugyanez Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2/2 \\ \sim \\ s_1 \leftrightarrow s_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2-3s_1 \\ \sim \\ s_3-3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -3/2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2-s_3 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -3/2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3+5s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3/2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-2s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3/2 & -4 \end{array}\right]$$

2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & a & -1 \\ 2 & 5 & 2 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2-3s_2 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & a-6 & -22 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3/(-1) \\ \sim \\ s_2 \leftrightarrow s_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & a-6 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3+8s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+10 & 2 \end{array}\right]$$

Ha $a=-10$, akkor nincs megoldás. Ha $a \neq -10$, akkor egyértelmű a megoldás. Az $a=-9$ esetben:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-2s_3 \\ \sim \\ s_2-2s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-3s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Tehát $x=6$, $y=-1$, $z=2$.

3. Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, így először a homogén egyenletet oldjuk meg, melynek megoldása:

$$y = \pm e^{-\int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = \pm e^{2\ln|x|+C} = C'x^2, \quad C' \in \mathbb{R}$$

Az inhomogént az állandók variálásának módszerével oldjuk meg:

$$C(x) = \int \frac{x^2 \sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

Ezzel az általános megoldás:

$$y = (C - \cos x)x^2 \qquad C \in \mathbb{R}$$

4. Ez egy állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Először a homogén részt oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+2\lambda-3=0$, melynek gyökei 1 és -3, így a homogén általános megoldása:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x}$$

Az inhomogén tag egyben megoldás is (külső rezonancia), így az $y = axe^x$ próbafüggvény, melyet az egyenletbe helyettesítve:

$$a(x+2)e^x + 2a(x+1)e^x - 3axe^x = e^x,$$

amiből $a=\frac{1}{4}$, és ezzel az általános megoldás:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= C_1 + C_2 + 0 && \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 2 \\ 1 = y'(0) &= C_1 - 3C_2 + \frac{1}{4} && \Rightarrow \quad C_1 - 3C_2 = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

Amiből $C_1 = \frac{27}{16}$ és $C_2 = \frac{5}{16}$. Így a keresett megoldás:

$$y(x) = \frac{27}{16}e^x + \frac{5}{16}e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x$$

Ugyanez Laplace-transzformációval:
A transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned} s^2Y - 2s - 1 + 2(sY - 2) - 3Y &= \frac{1}{s-1} \\ (s^2+2s-3)Y &= \frac{1}{s-1} + 2s + 5 = \frac{2s^2+3s-4}{s-1} \\ Y &= \frac{2s^2+3s-4}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} \\ 2s^2+3s-4 &= A(s^2+2s-3) + B(s+3) + C(s^2-2s+1) \end{aligned}$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} 2 &= A + C \\ 3 &= 2A + B - 2C \\ -4 &= -3A + 3B + C \end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$A = \frac{27}{16}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{5}{16}$$

Ezzel

$$Y = \frac{\frac{27}{16}}{s-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(s-1)^2} + \frac{\frac{5}{16}}{s+3}$$

És így a megoldás:

$$y(t) = \frac{27}{16}e^t + \frac{1}{4}te^t + \frac{5}{16}e^{-3t}$$

5. A parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = \ln(x+2y) + \frac{x}{x+2y} \qquad f'_x(-1,1) = -1$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2x}{x+2y} \qquad f'_y(-1,1) = -2$$

Így az érintősík egyenlete ($f(-1,1) = -1$):

$$z = -(x+1) - 2(y-1) - 1 \iff z = -x - 2y$$

6. Gömbi koordinátákat használunk, a határok:

$$x^2+y^2+z^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq r \leq 2, \quad x \leq 0, 0 \leq y \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

A térfogathoz az 1-et kell integrálni a megfelelő Jacobi-determinánssal:

$$\int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[r^2 \sin\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r^2 \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r =$$
$$= \int_0^2 \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^2 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{8}{3} = \frac{2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{3} \approx 1{,}227$$

7. A binomiális sort használjuk:

$$\sqrt[3]{27 - 3x^2} = 3\sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{9}} = 3\left(1 + \left(-\frac{x^2}{9}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \left(-\frac{x^2}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{(-1)^n}{3^{2n-1}} x^{2n},$$

mely $\left|-\frac{x^2}{9}\right| < 1$, azaz $|x| < 3$ esetén konvergens, így a konvergenciasugár 3.
Az x^4 együtthatójából ($n = 2$):

$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot \binom{\frac{1}{3}}{2} \cdot \frac{(-1)^2}{3^3} = 24 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2} \cdot \frac{1}{27} = -\frac{8}{81}$$