2. vizsga megoldásvázlata

1. Az alábbi mátrix rangját kell kiszámolni.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a rang 2, így 2 lineárisan független vektor választható ki.

2.
$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p+6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A második koordinátából $\lambda_1 = 2$, így $2p + 6 = 4$, azaz $p = -1$.
A mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$(-1-\lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

Tehát $\lambda_2 = -3$ a másik sajátérték. Ehhez a $(-1, 1)$ vektor nemnulla számszorosai a sajátvektorok.

3. Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, így először a homogén egyenletet oldjuk meg, melynek megoldása:

$$y = \pm e^{-\int \sin x \, \mathrm{d}x} = \pm e^{\cos x + C} = C' e^{\cos x}, \quad C' \in \mathbb{R}$$

Az inhomogént az állandók variálásának módszerével oldjuk meg:

$$C(x) = \int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} \, \mathrm{d}x = \int \sin x \; e^{-\cos x} \, \mathrm{d}x = e^{-\cos x} + C$$

Ezzel az általános megoldás:

$$y = Ce^{\cos x} - e^{-\cos x} e^{\cos x} = Ce^{\cos x} + 1 \qquad C \in \mathbb{R}$$

Másik lehetőség: Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'}{1-y} \, \mathrm{d}x &= \int \sin x \, \mathrm{d}x \\ -\ln|1-y| &= -\cos x + C \\ 1 - y &= C' e^{\cos x} \qquad C' \in \mathbb{R} \\ y &= C'' e^{\cos x} + 1 \qquad C'' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. Ez egy állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Először a homogén részt oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, melynek kétszeres gyöke a -2, így a homogén általános megoldása:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

Az inhomogén tag egy első fokú polinom, így az $y = ax + b$ próbafüggvény, melyet az egyenletbe helyettesítve:

$$0 + 4a + 4(ax + b) = x,$$

amiből $a = \frac{1}{4}$ és $b = -\frac{1}{4}$, és ezzel az általános megoldás:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= C_1 + 0 - \frac{1}{4} && \Rightarrow \quad C_1 = \frac{5}{4} \\ -2 = y'(0) &= -2C_1 + C_2 + \frac{1}{4} && \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

Így a keresett megoldás:

$$y(x) = \frac{5}{4} e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Ugyanez Laplace-transzformációval:
A transzformált egyenlet:

$$s^2Y - 1s - (-2) + 4(sY - 1) + 4Y = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 4s + 4)Y = \frac{1}{s^2} + s + 2 = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2}$$

$$Y = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{(s+2)^2 s^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2}$$

$$s^3 + 2s^2 + 1 = A(s^3 + 2s^2) + Bs^2 + C(s^3 + 4s^2 + 4s) + D(s^2 + 4s + 4)$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} 1 &= A + C \\ 2 &= 2A + B + 4C + D \\ 0 &= 4C + 4D \\ 1 &= 4D \end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$A = \frac{5}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = \frac{1}{4}$$

Ezzel

$$Y = \frac{\frac{5}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{4}}{(s+2)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{4}}{s^2}$$

És így a megoldás:

$$y(t) = \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t$$

5. Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a parciális deriváltak eltűnnek:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 4x^3 + y^2 - 6y + 5 \\ f'_y(x,y) &= 2xy - 6x \qquad \Rightarrow \qquad 2x(y-3) = 0 \end{aligned}$$

A másodikból $x = 0$ vagy $y = 3$. Ezeket az elsőbe visszahelyettesítve kapjuk a stacionárius pontokat: $(0,1), (0,5), (1,3)$.
A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 12x^2 & 2y-6 \\ 2y-6 & 2x \end{vmatrix} = 24x^3 - (2y-6)^2,$$

mely az első kettő stacionárius pontban negatív (nyeregpont), a harmadikban pozitív, ami lokális minimumhely ($12x^2 > 0$). Értéke: $f(1,3) = 0$.

6. Az átfogó egyenlete $y = 3 - \frac{3}{2}x$, így a kérdéses integrál:

$$\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{3-\frac{3}{2}x} \mathrm{d}x = \int_0^2 x\frac{\left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 9x - 9x^2 + \frac{9}{4}x^3 \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[9 \cdot \frac{x^2}{2} - 9 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(9 \cdot \frac{4}{2} - 9 \cdot \frac{8}{3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{4} \right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

7.

$$f(x) = \frac{4}{x+2} = \frac{4}{x-5+7} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{7}} = \frac{4}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-5}{7} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{7^{n+1}}(x-5)^n,$$

mely $\left| -\frac{x-5}{7} \right| < 1$, azaz $|x - 5| < 7$, azaz $x \in (-2, 12)$ esetén konvergens.