3. vizsga megoldásvázlata

1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & b \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2-2s_1 \\ \sim \\ s_3-3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & b-3 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2/2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & b-3 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3+3s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right]$$

Csak $b = -3$ esetén van megoldás, ekkor végtelen sok:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-3s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

A z szabad paraméter, ezzel fejezhetjük ki a többi változót:

$$\begin{array}{rcl} x-4z & = & -5 \\ y+2z & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & -5+4z \\ y & = & 2-2z \end{array} \qquad z \in \mathbb{R}$$

2.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+6 \\ 22 \end{bmatrix},$$

így a $\mathbf{v}_1$-hez tartozó sajátérték $\lambda_1 = 11$, és így $a = 9$.
Ekkor a karakterisztikus polinom:

$$(9-\lambda)(5-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 14\lambda + 33 = (\lambda - 11)(\lambda - 3),$$

így $\lambda_2 = 3$. Ehhez tartozó sajátvektor pl. az $(1, -2)$.

3. Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned} \int y^2 e^{-y^3} y' \, \mathrm{d}x &= \int x^2 \, \mathrm{d}x \\ -\frac{1}{3} e^{-y^3} &= \frac{1}{3} x^3 + C \\ e^{-y^3} &= -x^3 + C' \qquad C' \in \mathbb{R} \\ -y^3 &= \ln(C' - x^3) \qquad C' \in \mathbb{R} \\ y(x) &= -\sqrt[3]{\ln(C' - x^3)} \qquad C' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. Ez egy állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Először a homogén részt oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, melynek gyökei az $1 \pm 3i$, így a homogén általános megoldása:

$$y(x) = C_1 e^x \sin(3x) + C_2 e^x \cos(3x)$$

Az inhomogén tag e^x, nincs rezonancia, így $y = ae^x$ a próbafüggvény, melyet az egyenletbe helyettesítve:

$$ae^x - 2ae^x + 10ae^x = e^x,$$

amiből $a = \frac{1}{9}$, és ezzel az általános megoldás:

$$y(x) = C_1 e^x \sin(3x) + C_2 e^x \cos(3x) + \frac{1}{9} e^x$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= C_2 + \frac{1}{9} & \Rightarrow \quad C_2 &= \frac{8}{9} \\ 2 = y'(0) &= 3C_1 + C_2 + \frac{1}{9} & \Rightarrow \quad C_1 &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

Így a keresett megoldás:

$$y(x) = \frac{1}{3} e^x \sin(3x) + \frac{8}{9} e^x \cos(3x) + \frac{1}{9} e^x$$

Ugyanez Laplace-transzformációval:
A transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned}
s^2Y - 1s - 2 - 2(sY-1) + 10Y &= \frac{1}{s-1} \\
(s^2-2s+10)Y &= \frac{1}{s-1} + s = \frac{s^2-s+1}{s-1} \\
Y &= \frac{s^2-s+1}{(s-1)(s^2-2s+10)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{(s-1)^2+9} \\
s^2-s+1 &= A(s^2-2s+10) + (Bs+C)(s-1)
\end{aligned}$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned}
1 &= A+B \\
-1 &= -2A-B+C \\
1 &= 10A-C
\end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$A = \frac{1}{9}, \quad B = \frac{8}{9}, \quad C = \frac{1}{9}$$

Ezzel

$$Y = \frac{\frac{1}{9}}{s-1} + \frac{\frac{8}{9}s + \frac{1}{9}}{(s-1)^2+9} = \frac{\frac{8}{9}(s-1)+1}{(s-1)^2+9} = \frac{\frac{1}{9}}{s-1} + \frac{8}{9}\cdot\frac{s-1}{(s-1)^2+3^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s-1)^2+3^2}$$

És így a megoldás:

$$y(t) = \frac{1}{9}e^t + \frac{8}{9}e^t\cos(3t) + \frac{1}{3}e^t\sin(3t)$$

5.

$$f'_x(x,y) = \frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \qquad f'_x(1,-2) = 4$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \qquad f'_y(1,-2) = 1$$

Így a gradiens $(4,1)$. Az iránymenti derivált minimuma ennek hosszának az ellentettje: $-\sqrt{17} \approx -4{,}123$.

6. Polárkoordinátákat használunk, a határok: $0 \le r \le \sqrt{2}$ és $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big((r\cos\varphi)(r\sin\varphi)^2 + r\cos\varphi\big)\, r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4\cos\varphi\sin^2\varphi + r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left[r^4\frac{\sin^3\varphi}{3} + r^2\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^4}{6\sqrt{2}} + \frac{r^2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^5}{30\sqrt{2}} + \frac{r^3}{3\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15} + \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$$

7.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}\cdot 3} = \frac{1}{3},$$

így a konvergenciasugár 3, így a hatványsor a $(-6,0)$ intervallumban konvergens.

$x=0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0+3)^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, ami divergens.

$x=-6$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6+3)^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, ami Leibniz-sor, így konvergens.

A konvergenciaintervallum: $[-6,0)$.