4. vizsga megoldásvázlata

1.

$$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}4\\1\\4\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}$$

Ez egy egyenletrendszert ad x, y, z-re, melyet a szokásos módon oldhatunk meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}4&3&5&2\\1&1&3&3\\4&1&2&4\end{array}\right] \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\4&3&5&2\\4&1&2&4\end{array}\right] \underset{s_3-4s_1}{\overset{s_2-4s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&-1&-7&-10\\0&-3&-10&-8\end{array}\right] \overset{s_2/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&1&7&10\\0&-3&-10&-8\end{array}\right]$$

$$\overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&1&7&10\\0&0&11&22\end{array}\right] \overset{s_3/11}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&1&7&10\\0&0&1&2\end{array}\right] \underset{s_2-7s_3}{\overset{s_1-3s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-3\\0&1&0&-4\\0&0&1&2\end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-4\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

Tehát $x = 1, y = -4, z = 2$, így a megadott vektor koordinátái a megadott bázisban $(1, -4, 2)$.

2. A determináns: $3 + 0 + 18 - 6 - 0 - 12 = 3$.

aldeterminánsok:

$$\begin{bmatrix}-3&-1&4\\-6&-3&6\\-3&-3&3\end{bmatrix}$$

transzponálás:

$$\begin{bmatrix}-3&-6&-3\\-1&-3&-3\\4&6&3\end{bmatrix}$$

sakktábla:

$$\begin{bmatrix}-3&6&-3\\1&-3&3\\4&-6&3\end{bmatrix}$$

determinánssal osztás:

$$\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1/3&-1&1\\4/3&-2&1\end{bmatrix}$$

Ugyanez Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&3&1&0&0\\3&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right] \overset{s_1/3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&\frac{1}{3}&0&0\\3&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&\frac{1}{3}&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&2&-1&-\frac{2}{3}&0&1\end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&\frac{1}{3}&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&\frac{4}{3}&-2&1\end{array}\right] \underset{s_2+s_3}{\overset{s_1-s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&2&-1\\0&1&0&\frac{1}{3}&-1&1\\0&0&1&\frac{4}{3}&-2&1\end{array}\right]$$

3. Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, így először a homogén egyenletet oldjuk meg, melynek megoldása:

$$y = \pm e^{-\int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = \pm e^{2\ln|x|+C} = C'x^2, \quad C' \in \mathbb{R}$$

Az inhomogént az állandók variálásának módszerével oldjuk meg:

$$C(x) = \int \frac{x^3+x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$$

Ezzel az általános megoldás:

$$y = Cx^2 + \frac{x^4}{2} + x^2\ln|x|, \qquad C \in \mathbb{R}$$

4. Ez egy állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Először a homogén részt oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, melynek gyökei a 0 és a -2, így a homogén általános megoldása:

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-2x}$$

Az inhomogén tag $\sin(2x)$, így $y = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ a próbafüggvény, melyet az egyenletbe helyettesítve:

$$-4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) + 2(2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)) = \sin(2x),$$

amiből $-4a - 4b = 1$ és $-4b + 4a = 0$, amiből $a = b = -\frac{1}{8}$, és ezzel az általános megoldás:

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x)$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{8} \qquad &\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = \frac{9}{8} \\ -1 = y'(0) = -2C_2 - \frac{1}{8}\cdot 2 \qquad &\Rightarrow \quad C_2 = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

Így a keresett megoldás:

$$y(x) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}e^{-2x} - \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x)$$

Ugyanez Laplace-transzformációval:
A transzformált egyenlet:

$$
\begin{aligned}
s^2Y - 1s + 1 + 2(sY - 1) &= \frac{2}{s^2+4} \\
(s^2+2s)Y &= \frac{2}{s^2+4} + s + 1 = \frac{s^3+s^2+4s+6}{s^2+4} \\
Y &= \frac{s^3+s^2+4s+6}{(s^2+4)s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \\
s^3+s^2+4s+6 &= A(s^3+2s^2+4s+8) + B(s^3+4s) + (Cs+D)(s^2+2s)
\end{aligned}
$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$
\begin{aligned}
1 &= A + B + C \\
1 &= 2A + 2C + D \\
4 &= 4A + 4B + 2D \\
6 &= 8A
\end{aligned}
$$

Ennek megoldása:

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{3}{8}, \quad C = -\frac{1}{8}, \quad D = -\frac{1}{4}$$

Ezzel

$$Y = \frac{\frac{3}{4}}{s} + \frac{\frac{3}{8}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{8}s - \frac{1}{4}}{s^2+4} = \frac{\frac{3}{4}}{s} + \frac{\frac{3}{8}}{s+2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

És így a megoldás:

$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{8}\sin(2t)$$

5.

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \frac{-2y(x-3) - (1-2xy)}{(x-3)^2} = \frac{6y-1}{(x-3)^2} & f'_x(2,1) &= 5 \\
f'_y(x,y) &= \frac{-2x}{x-3} & f'_y(2,1) &= 4
\end{aligned}
$$

Felhasználva, hogy $f(2,1) = 3$, az érintősík egyenlete:

$$
\begin{aligned}
z &= 5(x-2) + 4(y-1) + 3 \\
z &= 5x + 4y - 11
\end{aligned}
$$

6. Felcseréljük az integrálás sorrendjét:

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 \sin\left(y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{y/2} \sin\left(y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[x\sin\left(y^2\right)\right]_{x=0}^{y/2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{2}\sin\left(y^2\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{2y\sin\left(y^2\right)}{4}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{\cos\left(y^2\right)}{4}\right]_{y=0}^2 = \frac{1-\cos 4}{4} \approx 0{,}413$$

7. A binomiális sort használjuk:

$$f(x) = \sqrt{25+5x^2} = 5\sqrt{1+\frac{x^2}{5}} = 5\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x^2}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{5^{n-1}}x^{2n},$$

mely $\left|\frac{x^2}{5}\right| < 1$, azaz $|x| < \sqrt{5}$ esetén konvergens, így a konvergenciasugár $\sqrt{5}$.
Az x^6 együtthatójából ($n = 3$):

$$f^{(6)}(0) = 6!\cdot\binom{\frac{1}{2}}{3}\cdot\frac{1}{5^2} = 720\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}\cdot\frac{1}{25} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$