Megoldás 2023.06.21.

(A) Legyen A egy (n×n)-es mátrix, és jelölje $\bar{A}_{ij}$ A (i,j)-edik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. Ekkor A adjungáltja azon mátrix transzponáltja, melynek (i,j)-edik eleme $\bar{A}_{ij}$.

(B) A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, ha van olyan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ numerikus sor, melyre $|f_n(x)| \le a_n$ teljesül minden n pozitív egészre és $x \in I$-re.

(C) Legyen az f kétváltozós valós függvény totálisan deriválható $(x_0;y_0)$-ban. Ekkor a $z = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$ egyenletű síkot f $(x_0;y_0)$-beli érintősíkjának nevezzük.

(1)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ a & 8 & 3 & 0 \\ 0 & b & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 - a s_1 \\ s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8-2a & 3 & 0 \\ 0 & b & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 - \frac{3}{5} s_3 \\ s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8-2a-\frac{3}{5}b & 0 & 0 \\ 0 & b & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Ha $8-2a-\frac{3}{5}b = 0$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, melyek $x = -2y$, $z = -\frac{b}{5}y$, y szabad paraméter. Ha $8-2a-\frac{3}{5}b \neq 0$, akkor a fenti homogén lineáris egyenletrendszernek csak a triviális megoldása van, ami $x = y = z = 0$.

(2)
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1 \text{ a sajátértékek.}$$

$\lambda_1 = 2$:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim s_2 - s_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$x_1 = x_2 + 2x_3$, azaz $\underline{v} = \begin{bmatrix} x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, x_2, x_3 nem egyszerre 0.

$\lambda_2 = 1$:
$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$x_1 = 0$, $x_3 = -x_2$, azaz $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_2 \neq 0$

③ Ez egy elsőrendű, inhomogén lineáris differenciálegyenlet. A hozzátartozó homogén egyenlet általános megoldása $Y = C\cdot e^{-\int e^x dx} = C\cdot e^{-e^x}$

Az állandó variálásának módszerét alkalmazzuk: $y_p = k(x)\cdot e^{-e^x}$

$y_p' = k'(x)\, e^{-e^x} + k(x)\cdot e^{-e^x}\cdot(-e^x)$, tehát az eredeti egyenlet:

$$k'(x)\cdot e^{-e^x} + k(x)\cdot e^{-e^x}\cdot(-e^x) + e^x\cdot k(x)\cdot e^{-e^x} = -2\cdot e^x \Rightarrow k'(x) = \frac{-2e^x}{e^{-e^x}} = -2e^x\cdot e^{e^x}$$

$\int e^x\cdot e^{e^x}dx = e^{e^x} + C'$, tehát $k(x) = -2e^{e^x}$ jó. Ebből

$y_p = -2e^{e^x}\cdot e^{-e^x} = -2$, azaz az eredeti egyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_p = C e^{-e^x} - 2$$

④ Ez egy állandó együtthatós, másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet. A hozzátartozó homogén egyenlet: $Y'' - 2Y' + Y = 0$. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ kétszeres gyök. Tehát $Y = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Az inhomogén egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével keressük: $y_p = ax + b \Rightarrow y_p' = a,\ y_p'' = 0$. Tehát

$$-2a + (ax+b) = x \Rightarrow a = 1 \text{ és } -2a + b = 0 \Rightarrow b = 2.$$

Azaz $y_p = x+2$, és $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x + 2$.

⑤ $x, y \neq 0$. $f_x'(x;y) = 1 - \frac{y}{x^2}$, $f_y'(x;y) = \frac{1}{x} - \frac{8}{y^2}$.

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \frac{y}{x^2} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{8}{y^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow y^2 = 8x \Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow x^3 = 8\ (x \neq 0 \text{ miatt}) \Rightarrow x = 2 \text{ és } y = 4.$$

Egy stacionárius pont van: $P(2;4)$.

$f_{xx}''(x;y) = \frac{2y}{x^3}$, $f_{xy}''(x;y) = -\frac{1}{x^2}$, $f_{yy}''(x;y) = \frac{16}{y^3}$. A Hesse-determináns

$$H(x;y) = \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{16}{y^3} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{32}{x^3y^2} - \frac{1}{x^4} \Rightarrow H(2;4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0 \Rightarrow \text{van lok. sz. é.}$$

$f_{xx}''(2;4) = 1 > 0 \Rightarrow$ lokális minimum. Értéke $f(2;4) = 2+2+2 = 6$.

⑥ $y^2 \le \sin^2 x \Leftrightarrow -\sin x \le y \le \sin x$, mivel $\sin x \ge 0$, ha $0 \le x \le \pi$.

Ebből

$$\iint_T \sin^2 x - y^2\, dx\,dy = \int_0^{\pi}\left(\int_{-\sin x}^{\sin x} \sin^2 x - y^2\, dy\right)dx = \int_0^{\pi}\left[\sin^2 x\cdot y - \frac{y^3}{3}\right]_{-\sin x}^{\sin x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{4}{3}\sin^3 x \, dx = \frac{4}{3}\cdot\int_0^{\pi} \sin x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx = \frac{4}{3}\int_0^{\pi} \sin x + (-\sin x)\cos^2 x \, dx =$$

$$= \frac{4}{3}\left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{16}{9}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}}\cdot x^n = 12\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = 12\cdot\left(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right) = 12\cdot\left(-1+\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right) =$$

$$= 12\cdot\frac{\frac{x}{3}-1+1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{4x}{1-\frac{x}{3}} = \frac{12x}{3-x},$$ ~~ahol~~ és a sor $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, azaz

$x \in (-3;3)$ esetén konvergens a mértani sor összegképlete alapján. Tehát a konvergenciatartomány: $(-3;3)$.