Elmélet

A) (5 pont) Mondja ki egy négyzetes mátrix sajátvektorának és sajátértékének definícióját!

Megoldás A $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám az A négyzetes mátrix sajátértéke, ha létezik olyan $\vec{v} \neq \vec{o}$ vektor, mely kielégíti az $A\vec{c} = \lambda\vec{v}$ egyenletet. Ekkor a $\vec{v} \neq \vec{o}$ vektort λ-hoz tartozó sajétvektornak nevezzük.

B) (5 pont) Ismertesse, hogy a sor- és oszlopműveleteket egy mátrix determinánsának, rangjának és inverzének kiszámításánál hogyan tudjuk használni!

Megoldás Egy mátrix determinánsának kiszámításánál mindkét fajta műveletet használhatjuk az alábbi módon: egy sor/oszlop skalárszorosának hozzáadása egy másikhoz a determináns értékét nem változtatja; ha a determináns egy sorát/oszlopát egy skalárral megszorozzuk, a determináns értéke ugyanennyiszeresére változik. Ha a determináns két sorát/oszlopát megcseréljük, a determináns előjelet vált.
Rangnál mindkét fajta műveletet használhatjuk, és (ha nem szorzunk 0-val sort vagy oszlopot), a rang értékét nem változtatják.
Ha egy négyzetes mátrixot sor- vagy oszlopműveletekkel egységmátrixszá transzformáljuk, ugyanezen műveletek ugyanilyen sorrendben elvégezve az egyésgmátrixot a mátrix inverzévé transzformálják. Ekkor vagy csak sor-, vagy csak oszlopműveleteket használhatunk.

C) (5 pont) Mondja ki egy kétváltozós függvény lokális szélsőértékére vonatkozó elégséges feltételt!

Megoldás Legyen az f kétváltozós függvénynek az összes második parciális deriváltja folytonos a $P_0(x_0, y_0)$ pontban. Tegyük fel, hogy $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Ha az $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$ determináns pozitív, akkor f-nek P_0-ban lokális szélsőértéke van. Ha ekkor $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor a szélsőérték minimum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor maximum.

Feladatok

1. (6 pont) Hány megoldása van a megadott egyenletrendszernek az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek függvényében?

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ ax_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= b \end{aligned}$$

Megoldás A Kronecker-Capelli tételt használjuk.

$$r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ a & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & b \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ a+3 & 0 & -4 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & b \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 7+2b \\ -1 & 0 & 2 & b \end{array}\right]\right) =$$
$$r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 7+2b \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]\right).$$

Jelölje A az együttható, és A_b a kibővített mátrixot. Ha $a \neq -1$, akkor $r(A) = r(A_b) = 3$ és három ismeretlen van, így pontosan egy megoldás létezik. Ha $a = -1$ és $b \neq -3,5$, akkor $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$, tehát nincs megoldás. Ha $a = -1$ és $b = -3,5$, akkor $r(A) = r(A_b) = 2$, tehát végtelen sok megoldás létezik.

2. (6 pont) Oldja meg az $y'' - 3y' + 2y = x^2$ differenciálegyenletet!

Megoldás A homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2-3\lambda+2=0$, melynek gyökei $\lambda_1=1$ és $\lambda_2=2$, így a homogén egyenlet általános megoldása $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p=ax^2+bx+c$ alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$ és $C=\frac{7}{4}$ adódik, amiből $y=Y+y_p=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$.

3. (7 pont) Oldja meg Laplace-transzformáció segítségével az $y''+2y'+2y=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ kezdeti érték problémát!

Megoldás Az egyenlet Laplace-transzformáltja $s^2Y-1+2sY+2Y=\frac{1}{s}$. Ebből $Y=\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}=\frac{1/2}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+2s+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}$. Ebből $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^t\cos t+\frac{1}{2}e^t\sin t$.

4. (6 pont) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}=?$

Megoldás Legyen $y=mx$. Ekkor ezen egyenes mentén a határérték átírható $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-mx^2+m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1-m+m^2}{1+m^2}$. Mivel a végeredmény különböző m értékek esetén különböző értéket vesz fel, a határérték nem létezik.

5. (7 pont) Határozza meg az $f(x,y)=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$ függvény grafikonja alatti hengerszerű test előjeles térfogatát a $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{\pi}{2}\le x\le\pi, 0\le y\le x^2\right\}$ tartományon!

Megoldás Az előjeles térfogat megegyezik a függvény integráljával a megadott tartományon:

$$V=\iint\limits_T\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,d(x,y)=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int\limits_0^{x^2}\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,dy\,dx==\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\sin\frac{y}{x}\right]_0^{x^2}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx=$$

$$[-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1.$$

6. (7 pont) Alkalmas helyettesítéssel számolja ki: $\iint\limits_D xy\,d(x,y)$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x,y\ge 0,x^2+y^2\le 1\}$ tartomány!

Megoldás Síkbeli polárkoordinátára térünk át.

$$\iint\limits_D xy\,d(x,y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 r^2\cos\phi\sin\phi\cdot r\,dr\,d\phi=\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}.$$

7. (6 pont) Írja fel az $f(x)=(x-1)e^{-2x^2}$ függvény $x_0=0$ körüli Taylor-sorát. Mi a sor konvergenciatartománya?

Megoldás Most $f(x)=xe^{-2x^2}-e^{-x^2}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x^2)^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\cdot x^{2n+1}}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\cdot x^{2n}}{n!}$.
A sor $x\in\mathbb{R}$ esetén konvergens.