Megoldás

(1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2-2s_1 \\ s_3-s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2-4s_3 \\ s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} s_1-7s_2 \\ s_2 \\ s_3+3s_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -13 & -7 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 & -11 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1+3s_3 \\ s_2-s_3 \\ s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 & -11 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ -s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 11 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -3 & -2 & 7 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

(2) Csak az együtthatómátrixot alakítjuk, mert az egyenletrendszer homogén.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda-1 & 4 \\ 3 & -5 & 2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2-2s_1 \\ s_3-3s_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2/2 \\ s_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ s_2 \\ s_3+(1+\lambda)s_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda+3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 1 \\ 0 & -2+\frac{(\lambda+1)^2}{2} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda+3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\lambda^2+2\lambda-3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\lambda^2+2\lambda-3}{2} = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

a) $\lambda \neq 1; -3$ esetén $\frac{\lambda^2+2\lambda-3}{2} = 0$, ezért a nullázást folytatva az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, amiből $x=y=z=0$

b) Ha $\lambda=1$, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2y \\ z=-y \end{array}$$

y tetszőlegesen választható

c) Ha $\lambda=-3$, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ z=y \end{array}$$

y tetszőlegesen választható

(3)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -7 \\ 0 & -2-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -2-\lambda & -6 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((-2-\lambda)(5-\lambda)+12\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \Rightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=2$$

$\lambda_1=1$: $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3/2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1+3s_3 \\ s_2+3s_3 \\ s_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Azaz $-z=0 \Rightarrow z=0$, és $y=0$. A sajátvektorok: $v=\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x\neq 0$

$\lambda_2=2$: $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1+\frac{3}{2}s_3 \\ s_2+2s_3 \\ s_3 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $-x-\frac{5}{2}z=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}z$

$2y+3z=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}z$

A sajátvektorok: $v=\begin{bmatrix} -\frac{5}{2}z \\ -\frac{3}{2}z \\ z \end{bmatrix}$, $z\neq 0$

4) $(1+x^2)y' + x(1+y^2)=0 \Rightarrow \frac{y'}{1+y^2} = -\frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{y'}{1+y^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^2}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2}dy = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \operatorname{arctg} y = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C \Rightarrow y=\operatorname{tg}\left(C-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)$

5) Ez egy elsőrendű, inhomogén lineáris diff. egy.. A hozzátartozó homogén egyenlet: $Y'-(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)Y=0$, melynek általános megoldása

$Y=C\cdot e^{\int \operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\,dx} = C\cdot e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}dx} = C\cdot e^{-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|} =$

$= C\cdot e^{\ln|\operatorname{tg}x|} = C\cdot \operatorname{tg}x$

Az inhomogén egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével keressük: $y_p=k(x)\cdot\operatorname{tg}x \Rightarrow y_p' = k'(x)\operatorname{tg}x + k(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow k'(x)\operatorname{tg}x + k(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - (\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot k(x)\cdot\operatorname{tg}x = -4\sin^2 x$

$k'(x)\cdot\operatorname{tg}x + k(x)\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x - 1\right) = -4\sin^2 x$

$k'(x)\cdot\operatorname{tg}x = -4\sin^2 x$

$k'(x) = -4\sin x\cos x = -2\sin 2x$

$\int -2\sin 2x\,dx = \cos 2x + C \Rightarrow k(x)=\cos 2x \Rightarrow y_p=\cos 2x\cdot\operatorname{tg}x$

$y=Y+y_p = C\cdot\operatorname{tg}x + \cos 2x\cdot\operatorname{tg}x$