Zh megoldása

1. A determináns: $0+0+12-12-0-6=-6$.

aldeterminánsok:
$$\begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 \\ -4 & -12 & 2 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$
transzponálás:
$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -4 \\ -9 & -12 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
sakktábla:
$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 9 & -12 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$
determinánssal osztás:
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ugyanez Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3-s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right] \underset{s_2+3s_3}{\overset{s_1-2s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

2.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 2 & b \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \overset{s_1\leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & b \end{array}\right] \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & 2 & b-9 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -6 & -6 & 2 & b-9 \end{array}\right] \overset{s_3+6s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-7 \end{array}\right]$$

Csak $b=7$ esetén van megoldás, ekkor végtelen sok:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \overset{s_1-3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Az x_3 és x_4 szabad paraméter, ezekkel fejezhetjük ki a többi változót:

$$\begin{array}{rcl} x_1-x_3+x_4 & = & 2 \\ x_2+x_3-\frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{3} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2+x_3-x_4 \\ x_2 & = & \frac{1}{3}-x_3+\frac{1}{3}x_4 \end{array} \qquad x_3,x_4\in\mathbb{R}$$

3.
$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & -6 \\ 5 & 3-\lambda & -8 \\ 4 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda)(-4-\lambda)+24(3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-2\lambda)\lambda,$$

így a sajátértékek $0,2,3$. Sajátvektorok:

$$\lambda=0: \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \middle| x\neq 0 \right\}$$

$$\lambda=2: \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 1 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ x \\ 2x \end{bmatrix} \middle| x\neq 0 \right\}$$

$$\lambda=3: \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 0 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x\neq 0 \right\}$$

4. Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, így először a homogén egyenletet oldjuk meg, melynek megoldása:

$$y=\pm e^{\int 2x\,\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad y=Ce^{x^2}, \quad C\in\mathbb{R}$$

Az inhomogént az állandók variálásának módszerével oldjuk meg:

$$C(x)=\int 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}e^{-x^2}+C$$

Ezzel az általános megoldás:

$$y=Ce^{x^2}-\frac{3}{2} \qquad C\in\mathbb{R}$$

Másik lehetőség: Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet:

$$\int \frac{y'}{y+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln\left(\left|y+\frac{3}{2}\right|\right) = x^2+C$$

$$y+\frac{3}{2}=C'e^{x^2} \qquad C'\in\mathbb{R}$$

5. Ez egy állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Először a homogén részt oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, melynek gyökei $2 \pm i$, így a homogén általános megoldása:

$$y(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Az inhomogén tag egy elsőfokú polinom, így az $y = ax + b$ próbafüggvényt az egyenletbe helyetesítve:

$$0 - 4a + 5(ax + b) = x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{5}, b = \frac{4}{25}$$

Tehát az egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= C_1 + 0 + \frac{4}{25} & \Rightarrow \quad C_1 &= \frac{21}{25} \\ 2 = y'(0) &= 2C_1 + C_2 + \frac{1}{5} & \Rightarrow \quad C_2 &= \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Így a keresett megoldás:

$$y(x) = \frac{21}{25} e^{2x} \cos x + \frac{3}{25} e^{2x} \sin x + \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$$

Ugyanez Laplace-transzformációval:
A transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned} s^2 Y - s - 2 - 4(sY - 1) + 5Y &= \frac{1}{s^2} \\ (s^2 - 4s + 5)Y &= \frac{1}{s^2} + s - 2 = \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2} \\ Y &= \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s^2 - 4s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{(s-2)^2 + 1} \\ s^3 - 2s^2 + 1 &= As(s^2 - 4s + 5) + B(s^2 - 4s + 5) + (Cs + D)s^2 \end{aligned}$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} 1 &= A + C \\ -2 &= -4A + B + D \\ 0 &= 5A - 4B \\ 1 &= 5B \end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$B = \frac{1}{5}, \quad A = \frac{4}{25}, \quad D = -\frac{39}{25}, \quad C = \frac{21}{25}$$

Ezzel

$$Y = \frac{\frac{4}{25}}{s} + \frac{\frac{1}{5}}{s^2} + \frac{\frac{21}{25}s - \frac{39}{25}}{(s-2)^2 + 1} = \frac{\frac{4}{25}}{s} + \frac{\frac{1}{5}}{s^2} + \frac{\frac{21}{25}(s-2) + \frac{3}{25}}{(s-2)^2 + 1} = \frac{4}{25}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2} + \frac{21}{25}\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} + \frac{3}{25}\frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

És így a megoldás:

$$y(t) = \frac{4}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{21}{25}e^{2t} \cos t + \frac{3}{25}e^{2t} \sin t$$