5. vizsga végeredményei

4. primitív függvénye

5. (b)

6. Ha $x \neq 5$, akkor folytonos. A határérték $x = 5$-ben gyöktelenítéssel:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{x-1-4} =$$
$$= \lim_{x\to 5} \sqrt{x-1}+2 = 4 = f(5),$$

így $x = 5$-ben sincs szakadás.

7. Az $f(x) = x(12 - \frac{x}{2}) = 12x - \frac{x^2}{2}$ függvény maximumát keressük:
$f'(x) = 12 - x$, mely $x = 12$-ben tűnik el ($f(12) = 72$).
Ez lokális maximum, hiszen a második derivált: $f''(x) = -1$ negatív.
A függvénynek nemnegatív x esetén van értelme, a széleken a függvény:
$f(0) = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, tehát a lokális maximum globális is.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely nincs, páros, periódus nincs.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, így $y = 0$ vízszintes aszimptota $\pm\infty$-ben.
$f'(x) = e^{4-x^2}(-2x)$
$f''(x) = e^{4-x^2}(-2x)(-2x) + e^{4-x^2}(-2) = (4x^2-2)e^{4-x^2}$

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
f'		$+$		0		$-$	
f		$\nearrow$		max		$\searrow$	
f''	$+$	0		$-$		0	$+$
f	$\smile$	inf. pont		$\frown$		inf. pont	$\smile$

ÉK: $(0, e^4]$.

9. Polinomosztással $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 5 = (x^3 + 3x - 7)(x + 2) + 19$, így

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 5}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int x^3 + 3x - 7 + \frac{19}{x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 - 7x + 19\ln|x+2| + C$$

10. Kétszeri parciális integrálással:

$$\int x^2 \sin(3x)\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \frac{-\cos(3x)}{3} - \int 2x \cdot \frac{-\cos(3x)}{3}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2\cos(3x)}{3} +$$
$$+\frac{2}{3}\left(\frac{x\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9}\right) + C = -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{2x\sin(3x)}{9} + \frac{2\cos(3x)}{27} + C$$
$$\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{\sin(3x)}{3} - \int \frac{\sin(3x)}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C$$

11. A két görbe metszéspontja az $x^3 + x^2 + x + 1 = x^3 + 3$ egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = -2$ és $x_2 = 1$. E két határ között integráljuk a két függvény különbségét:

$$\int_{-2}^{1} (x^3+3) - (x^3+x^2+x+1)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2}$$