A2a 1. zárthelyi

1. Számítsuk ki a $\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3+2x)^5}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

2. Írjuk fel a $(2,3,4)$ ponton átmenő, az $(1,0,-2)$ és $(3,4,1)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletét.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4. Számítsuk ki az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Minden feladat azonos pontértékű.

A második oldalon a megoldás.

1.

$$\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{(3+2x)^5}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_3^b (3+2x)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(3+2x)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3(3+2x)^{\frac{3}{2}}}\right]_3^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{3(3+2b)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3(3+2\cdot 3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{81}$$

2. A normálvektor a két vektor vektoriális szorzata:

$$\mathbf{n} = (1,0,-2)\times(3,4,1) = (8,-7,4),$$

így a sík egyenlete: $8x-7y+4z=d$, ahol $d = 8\cdot 2 - 7\cdot 3 + 4\cdot 4 = 16-21+4 = 11$ (hogy átmenjen a ponton), így a sík egyenlete:

$$8x-7y+4z=11$$

3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2&5&1&5&3\\ 1&3&0&2&2\\ 3&2&2&3&4 \end{array}\right] \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&2&2\\ 2&5&1&5&3\\ 3&2&2&3&4 \end{array}\right] \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&2&2\\ 0&-1&1&1&-1\\ 0&-7&2&-3&-2 \end{array}\right] \overset{s_2/(-1)}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&2&2\\ 0&1&-1&-1&1\\ 0&-7&2&-3&-2 \end{array}\right] \overset{s_3+7s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&2&2\\ 0&1&-1&-1&1\\ 0&0&-5&-10&5 \end{array}\right] \overset{s_3/(-5)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&2&2\\ 0&1&-1&-1&1\\ 0&0&1&2&-1 \end{array}\right] \overset{s_2+s_3}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&2&2\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&2&-1 \end{array}\right] \overset{s_1-3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&-1&2\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&2&-1 \end{array}\right]$$

Így x_4 szabad paraméter, és

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2 + x_4 \\ x_2 &= -x_4 \\ x_3 &= -1 - 2x_4 \end{aligned} \qquad x_4 \in \mathbb{R}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 3&2&1&0\\ 2&3&4&5\\ 4&3&2&1\\ 3&4&5&6 \end{bmatrix} \overset{o_1\leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1&2&3&0\\ 4&3&2&5\\ 2&3&4&1\\ 5&4&3&6 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2-4s_1\\ \sim\\ s_3-2s_1\\ s_4-5s_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1&2&3&0\\ 0&-5&-10&5\\ 0&-1&-2&1\\ 0&-6&-12&6 \end{bmatrix} \underset{o_3-3o_1}{\overset{o_2-2s_1}{\sim}}$$
$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-5&-10&5\\ 0&-1&-2&1\\ 0&-6&-12&6 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&2&-1\\ 0&-1&-2&1\\ 0&-6&-12&6 \end{bmatrix} \underset{s_4+6s_2}{\overset{s_3+s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&2&-1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \underset{o_4+o_2}{\overset{o_3-2o_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

így a mátrix rangja 2.