

1. Számítsuk ki a $8i$ komplex szám harmadik gyökeit. Az eredményt algebrai alakban adjuk meg.
2. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit, és adjunk meg egy sajátvektort.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel az $f(x, y) = \frac{3x + 4y}{5x - 2y}$ függvény érintősját az $(1, 2)$ pontban.
4. Keressük meg az $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 4xy - 2x^2 + 5x$ függvény lokális szélsőértékeit, és azok típusát.

Minden feladat azonos pontértékű.

A második oldalon a megoldás.

1. $8i = 8(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$, így a harmadik gyökök:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{90^\circ}{3} + i \sin \frac{90^\circ}{3} \right) &= 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i \\ \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{90^\circ + 360^\circ}{3} + i \sin \frac{90^\circ + 360^\circ}{3} \right) &= 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i \\ \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{90^\circ + 720^\circ}{3} + i \sin \frac{90^\circ + 720^\circ}{3} \right) &= 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i\end{aligned}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)(2-\lambda) - 2) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4),$$

így a sajátértékek: 2, 1, 4. Sajátvektorok:

$$\begin{aligned}\lambda = 2: & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ sajátvektor: } (-6, 2, 1) \\ \lambda = 1: & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ sajátvektor: } (-1, 0, 1) \\ \lambda = 4: & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 1 & 3 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ sajátvektor: } (2, 0, 1)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{3x + 4y}{5x - 2y} & f(1, 2) &= 11 \\ f'_x(x, y) &= \frac{3(5x - 2y) - (3x + 4y)5}{(5x - 2y)^2} = \frac{-26y}{(5x - 2y)^2} & f'_x(1, 2) &= -52 \\ f'_y(x, y) &= \frac{4(5x - 2y) - (3x + 4y)(-2)}{(5x - 2y)^2} = \frac{26x}{(5x - 2y)^2} & f'_y(1, 2) &= 26\end{aligned}$$

Így az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned}z &= -52(x - 1) + 26(y - 2) + 11 \\ 52x - 26y + z &= 11\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= 3x^2 + y^2 + 4y - 4x + 5 \\ f'_y(x, y) &= 2xy + 4x = 2x(y + 2)\end{aligned}$$

Ha a második eltűnik, akkor $x = 0$ vagy $y = -2$. Előbbi esetben az első egyenletnek ($y^2 + 4y + 5 = 0$) nincs valós megoldása, utóbbi esetben ($3x^2 + 4 - 8 - 4x + 5 = 0$) pedig $x = 1$ vagy $x = \frac{1}{3}$. Stacionárius pontok: $(1, -2)$ és $(\frac{1}{3}, -2)$. Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 6x - 4 & 2y + 4 \\ 2y + 4 & 2x \end{vmatrix} = (6x - 4) \cdot 2x - (2y + 4)^2,$$

mely az $(1, -2)$ pontban $4 > 0$, így ez lokális szélsőérték hely, mégpedig minimum. Értéke: $f(1, -2) = 0$. Az $(\frac{1}{3}, -2)$ pontban pedig $-\frac{4}{3} < 0$, így itt nincs lokális szélsőérték.