Haladvány Kiadvány 2008.10.17.

Hujter Mihály és Oláh Béla

Négyzetekre bontás – új megoldások régi problémákra

A *perfekt* — vagy magyarul *teljes*, tökéletes — négyzeteket sokezer éve tiszteli az emberiség. Egy pozitív egész szám akkor perfekt (azaz *teljes*) *négyzet*, ha valamely egész szám négyzete. Már az ókor óta ismert a teljes négyzetek és a geometriai négyzetek közti két fontos kapcsolat azon a nyilvánvaló érintkezésen túl, hogy ha egy négyzet oldala egész szám, akkor a területe teljes négyzet: Egyrészt a Pitagórasz-tétel és a pitagóraszi számhármasok ismerete, másrészt az egész hosszúságú szakaszokból megszerkeszthető irracionális hosszúságokról való tudás.

Az első témakör ismert tétele szerint egy derékszögű háromszög mindhárom oldala akkor és csak akkor lehet egész szám, ha az átfogó hossza két különböző teljes négyzet összege, az egyik befogó pedig ezen két teljes négyzet különbsége. Így tehát a második és harmadik négyzetszámokból nyerjük a $3^2 + 2^2 = 13$ átfogójú, $3^2 - 2^2 = 5$ illetve $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ befogójú derékszögű háromszöget, vagy másik példaként a 22. és a 33. négyzetszámokból a $33^2 + 22^2 = 1573$ átfogót és a $33^2 - 22^2 = 605$ illetve a $2 \cdot 33 \cdot 22 = 1452$ befogókat.

A másik témakörből kiemeljük azt az ismert tényt, hogy a pozitív számok közül azoknak és csak azoknak lesz racionális a négyzetgyöke, melyek két teljes négyzet hányadosai.

A teljes négyzetek rokonai a *háromszögszámok*: Az n-edik háromszögszám definíció szerint 1-től n-ig az egészek összege, azaz $1 + 2 + ... + n = n(n+1)/2$. Itt jegyezzük meg, hogy az n-edik négyzetszám definiálható úgy is, mint a páratlan számok összege az elsőtől az n-edikig, tehát $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$. Mindezekből látszik az is, hogy két egymás utáni háromszögszám összege éppen egy teljes négyzet.

A háromszögszámok közül néhány és a teljes négyzetek közül is néhány különösen fontos valamely titokzatos okból. A 3-adik, a 7-edik, a 31-edik és a 127-edik háromszögszámot már az ókortól fogva tiszteljük, tökéletesnek mondjuk, hiszen mindegyik egyenlő a nála kisebb pozitív egész osztói összegével:

$$\begin{aligned}
6 &= 1+2+3 \\
28 &= 1+2+4+7+14 \\
496 &= 1+2+4+8+16+31+62+124+248 \\
8128 &= 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064
\end{aligned}$$

Érdekes, hogy a fenti összegek mindegyiképen éppen annyi tag — azaz osztó — van, ahány jegy a háromszögszám sorszámának kettes számrendszerbeli leírásához hell, és a kettes számrendszerbeli leírásban minden számjegy 1-es, sőt az 1-esek darabszáma és maga a sorszám is prímszám! Sőtmitöbb, a fenti összegekben a középső tagnál kezdve mindegyik tag éppen az előző tagok összege. Az ilyen különleges háromszögszámok — a *tökéletes*, azaz perfekt *számok* — kutatása mindmáig erőteljesen folyik. Pár hete sikerült bizonyítottan megtalálni azt a rekord nagy tökéletes számot, mely — háromszögszámként való — sorszámának leírásához 2-es számrendszerben 43112609 darab 1-esre van szükség. (Közel ennyi darab lottószelvény kitöltésével biztosíthatnánk magunknak a több mint 2 milliárdos főnyereményt!)

Az *Újszövetség* is kiemel két háromszögszámot: $153 = 3^2 \cdot 17$ és $666 = 3^2 \cdot 74$. A teológiai és numerológiai értelmezésekre itt most nem térünk ki, csak arra, hogy tízes számrendszerben mindkét szám különleges, és itt magának a 10-nek is szerepe van, mely az a háromszögszám, melynek sorszáma a második négyzetszám. Itt 666-nak , mint háromszögszámnak a sorszáma 36 és ez teljes négyzet, sőtmitöbb 36 háromszögszám is. Itt 36 sorszáma négyzetszámként 6 (azaz a harmadik háromszögszám), háromszögszámként 8 (azaz a második és negyedik négyzetszámok mértani közepe). Ugyanakkor 6 és 66 is háromszögszámok, sorszám szerint a harmadik és a tizenegyedik. A számjegyek összege 153 esetében négyzetszám, melynek sorszáma háromszögszám, 666 esetében a jegyek összege pedig egy olyan négyszetszám fele, mely négyzetszámnak — mint láttuk — a sorszáma újfent csak háromszögszám. Egy további érdekesség: Ha összeszorozzuk 666 számjegyeit, és az eredményt megszorozzuk 0.666...-tal, akkor a 6+6 sorszámú négyzetszámot kapjuk, azaz 144-et, mely utóbbi jegyeinek összege is, és szorzata is négyzetszám.

Egy harmadik háromszögszám is előfordul az Újszövetségben — figyelmeztetett bennünket kollégánk, Szabó P. G. —, a 23.: „*Kétszázhetvenhatan voltunk a hajón*", tudatta Pál; máskor pedig azt közölte, hogy ötször kapott „*egy híján negyvenet*” büntetésként. Észrevehetjük, hogy van olyan egészoldalú derékszögű háromszög, melynek oldalai $5 \cdot 39 + 2$, $5 \cdot 39$, és 28, és itt 28 éppen a hetedik háromszögszám, mely tökéletes is, és a két nagyobb oldal éppen a huszonnyolcadik négyzetszámot fogja közre, hiszen $5 \cdot 39 + 1 = 28^2$.

A matematikai analízisben is szerepe van a háromszög- és négyzetszámoknak. Ismeretes, hogy az összes háromszögszám reciprokának összege:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + ... = 2$$

A négyzetszámok reciprokösszege *Euler* szerint:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

Az utóbbi összefüggést geometrialiag úgy mondhatjuk, hogy az 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... oldalú négyzetek területének összege azon *négyzet területével* egyezik meg, mely négyzet *kerületének hossza* azonos egy $\sqrt{\frac{2}{3}}$ sugarú körével. (Itt a legnagyobb tag-négyzet kerülete 4, míg a nevezett körkerület $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 5.13$.) Euler nevezeteseredményére egy rövid bizonyítás olvasható az első szerző honlapján (l. hivatkozások).

Ha már Euler neve említésre került, említsük meg híres művét, melyben igazolja Fermat észrevételét, mely szerint minden 13-ra, 17-re, 21-re, 29-re, 33-ra, 37-re, 41-re, 49-re, ..., 81-re, 89-re, 93-ra, 99-re, 01-re, 09-re végződő prím két darab — nyilván különböző — teljes négyzet összege. Következésképpen ezek a prímek — tehát azok, melyek 20-szal osztva 1, 9, 13 vagy 17 maradékot adnak — egész oldalú derékszögű háromszögek átfogói is lehetnek, hiszen $13^2 - 5^2 = 12^2$, $17^2 - 15^2 = 8^2$, $29^2 - 21^2 = 20^2$, $37^2 - 35^2 = 12^2$, $41^2 - 9^2 = 40^2$, $53^2 - 45^2 = 28^2$, ..., $101^2 - 99^2 = 20^2$, $109^2 - 91^2 = 60^2$, és így tovább.

Másik érdekes kapcsolat: Ha két egymást követő pozitív egész szám összegének négyzetét vesszük, akkor pontosan 1-gyel többet kapunk, mint egy háromszögszám duplájának a négyzete. Tehát ha van két darab n oldalú négyzetünk és két darab $n+1$ oldalú négyzetünk, akkor ebből a négy négyzetből már csak azért sem tudunk összerakni egy nagy négyzetet, mert az összterület nem teljes négyzet.

Természetes módon merül fel a kérdés, hogy ha legalább kettő négyzetszámot összeadunk, mikor kapunk újra négyzetszámot. Ha a tagok száma kettő, akkor ez a pitagóraszi számhármasok keresésének klasszikus problémája, ha különböző teljes négyzeteket adunk össze, és a $\sqrt{2}$ szám irracionalitása okán lehetelen, ha ugyanazt a tagot akarjuk kétszer venni. A továbbiakban a figyelmünket az olyan, legalább három tagú összegekre fordítjuk, melyben a tagok különböző teljes négyzetek, és az összeg is teljes négyzet.

Az első 24 négyzetszám összege teljes négyzet, hiszen

$$1 + 4 + 9 + 16 + ... + 576 = 4900$$

A hetvenedik négyzetszám tehát nemcsak azzal hetvenkedhet, hogy decimálisan minden számjegye teljes négyzet, sőt az első két számjegy egybeolvasva is, illetve az utolsó két számjegy egybeolvasva is, és nemcsak azzal, hogy a 4-est vagy a 9-es elhagyva is teljes négyzetet kapunk, hanem azzal is, hogy a teljes négyzetek sorozata elejének is az összege. És ezt az utóbbi jó tulajdonságot csak a legelső és a huszonnegyedik teljes négyzet tudja, derül ki *Watson* kilencvenéves eredményéből, azaz

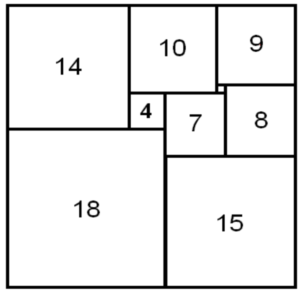
$$1 + 4 + 9 + 16 + ... + n^2 = m^2$$

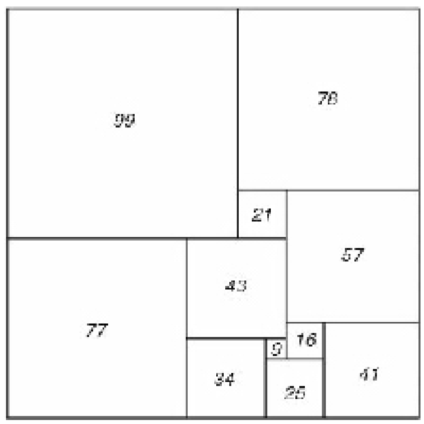
összes pozitív egész megoldásai: $n = m = 1$ és $n = 24$, $m = 70$.

De ne ugorjunk rögtön olyan nagyot! Nézzük meg, hogyan tudunk néhány — 24-nél lényegesen kevesebb —- páronként különböző négyzetből összerakni egy négyzetet. Nem is olyan könnyű ilyent találni! Egy majdnem négyzetre hamarabb sikerül rálelni:

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 32 \cdot 33 = 1056$$

Ezt az elrendezést Moroń találta 1925-ben. Csak az a bibi, hogy itt a jobboldal nem négyzetszám, hanem a harminckettedik háromszögszám kétszerese,





pedig annak örülnénk inkább, ha két egymásutáni háromszögszám összege, azaz négyzetszám lenne.

Tovább próbálkozva egy másik megoldást is kapunk, de újra csak egy háromszögszám kétszeresére:

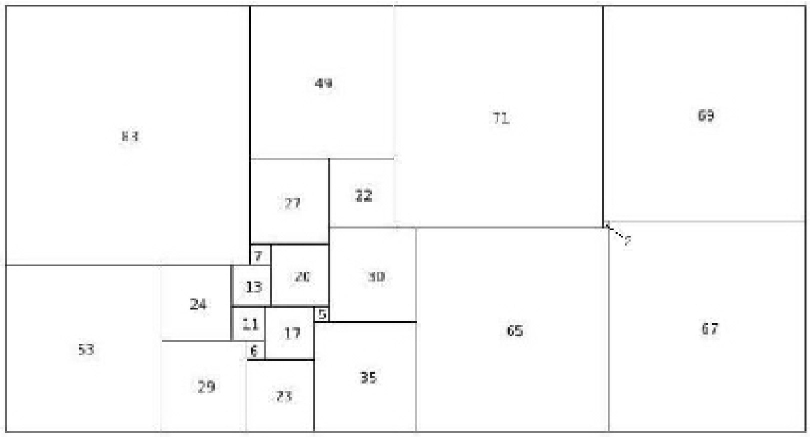
$$9^2 + 16^2 + 21^2 + 25^2 + 34^2 + 41^2 + 43^2 + 57^2 + 77^2 + 78^2 + 99^2 = 176 \cdot 177$$

Olyan elrendezés is ismert, amikor a egy négyzetszám kétszerese jön ki:

$$\begin{aligned} & 2^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 + 20^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 27^2 + \\ & 29^2 + 30^2 + 35^2 + 49^2 + 53^2 + 65^2 + 67^2 + 69^2 + 71^2 + 83^2 \\ = \; & 2 \cdot 136^2 \end{aligned}$$

Ennek az is érdekessége, hogy 136 háromszögszám, melynek sorszáma 16, mely maga is négyzetszám, melynek sorszáma 4, maga is teljes négyzet.

Úgy tűnik, ha a legkevesebb különböző négyzetből akarunk egy négyzetet kirakni, akkor Duivestijn konstrukciója az egyetlen, mely 21 darab kis négyzetből



áll:

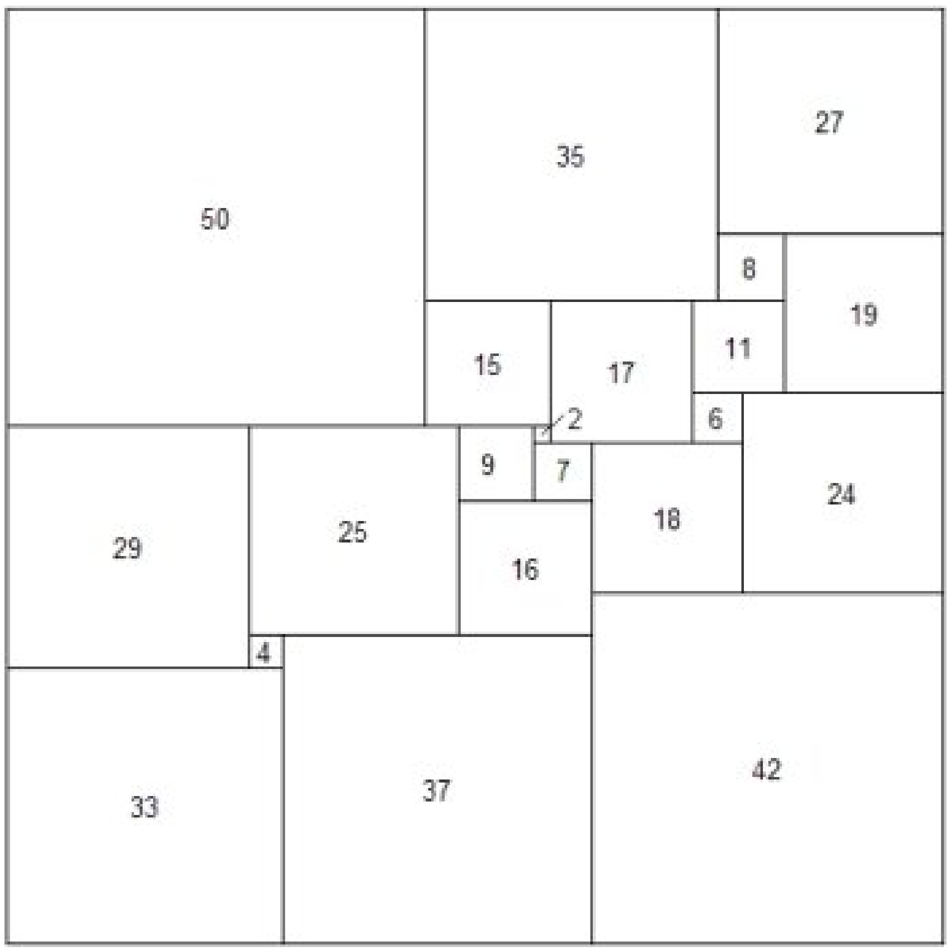
$$\begin{aligned} & 2^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 11^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + \\ & 19^2 + 24^2 + 25^2 + 27^2 + 29^2 + 33^2 + 35^2 + 37^2 + 42^2 + 50^2 \\ = \; & 112^2 \end{aligned}$$

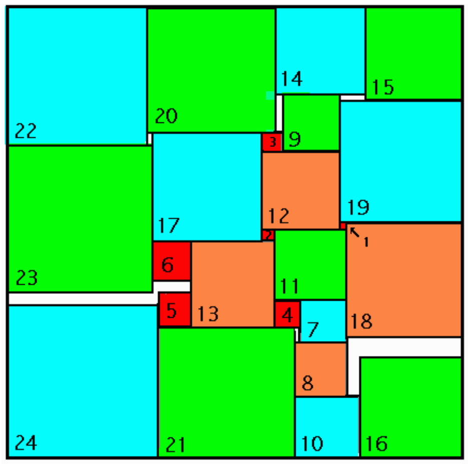
Itt még az is elmondható érdekességként, hogy 112-nek és $112^2 = 12\,544$-nek is a számjegyösszege négyzetszám, sőt maga 112 is a 4-szerese a tökéletes szám 28-nak.

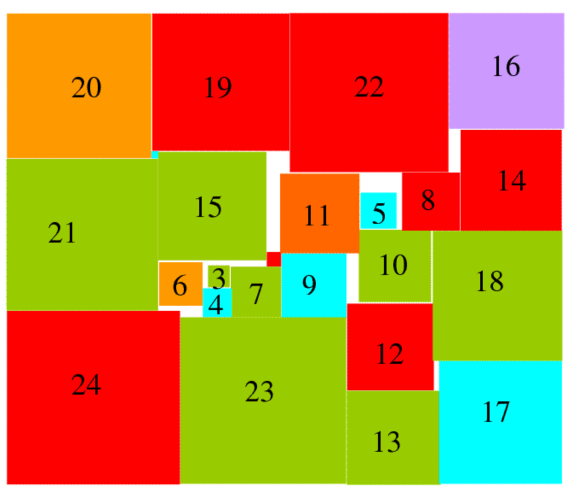
A kérdéskörnek kitersjedt irodalma van. Az olvasónak a hivatkozásokat ajánjuk. Az interneten való tájékozódáshoz ifjabb *Ed Pegg* honlapján ajánljuk kiindulásul.

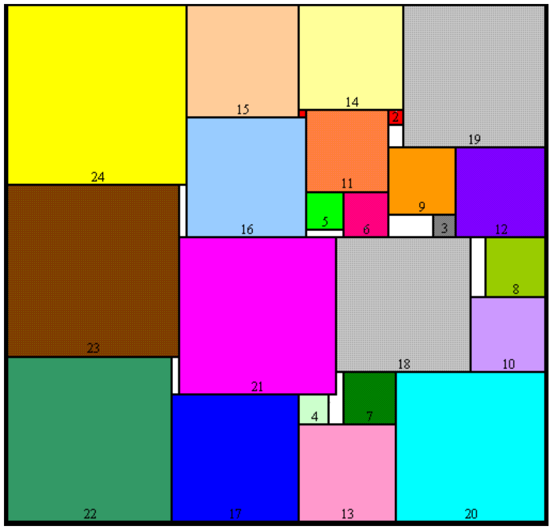
Térjünk vissza az első 24 négyzetszámhoz. *Gardner* 1966-ban megkérdezte, hogy összerakható-e ezekből egy 70×70-es négyzet. *Mullin* 1978-ban belátta, hogy ha ha egy négyzet kisebb, egymástól különböző négyzetekből van összerakva, akkor az összetevő négyzetek oldalhosszúságai nem alkothatnak számtani sorozatot. Következésképpen a legkisebb négyzet, mely tartalmazhathatja a fentemlített 24 darab négyzetet, legalább 71×71-es méretű. A jelen dolgozat első szerzője már 1992-ben közölt egy megoldást a 71×71-es négyzetbe való pakolásra:Kettőezer-kettőben újra publikálásra került a konstrukció és kiegészült azzal a kérdéssel, hogy vajon 70×71-es téglalapba is elhelyezhetők-e a négyzetek. Az már akkor is ismert volt, hogy 70×72-es téglalapba elhelyezhetők a négyzetek. Érdekesség, hogy 72 egy négyzetszám fele és $70 \cdot 72 = 5040 = 7!$, és ismeretes az is, *Platón* milyen nagy tisztelettel volt 5040 iránt. Ugyanakkor $70 \cdot 71 = 4970$ éppen a hetvenedik háromszögszám kétszerese.

Czap Gyula kollégántól kétféle megoldás is érkezett 2008-ban, melyek mindegyike 5040-nél kisebb területű téglalapba foglalja be a 24 négyzetet. A 65×77-es téglalap a következő, melyben a veszteség nem 140, hanem csak $65 \cdot 77 - 70^2 = 105$. Nekünk azonban sikerült még jobb megoldásra lelni: 69×72-es téglalap,


50
35
27
8
19
15
17
11
2
6
9
7
24
18
29
25
16
4
42
33
37


22
20
14
15
3
9
17
12
19
2
1
23
6
11
18
5
13
4
7
8
24
21
10
16


20
19
22
16
14
15
21
11
5
8
10
18
6
3
4
7
9
12
24
23
17
13



melynek a vesztesége csak $69 \cdot 72 - 70^2 = 68$. Tehát kevesebb, mint ami a 70×71-es téglalapé lenne, ha ismernénk egyáltalán olyan megoldást.

Hatalmas mennyiségű számítógépteljesítményt bevetve *Korf* 2004-ben újra felfedezte, hogy 71×71-es a legkisebb tartalmazó négyzet. Ugyanakkor megtalálta a legkisebb területű téglalapot is: 56×88-as, melynek a vesztesége mindössze $56 \cdot 88 - 70^2 = 28$. Már megint a tökéletes 28-as! Korf jelentése szerint a számítógépprogramjának 68308619567 esetet kellett megvizsgálnia.

Igaz ugyan, hogy Korf vesztesége lényegesen kevesebb, mint a miénk, de a 69×72-es téglalap jobban hasonlít a 70×70-es négyzetre, mint a 56×88-os téglalap. Továbbra is nyitott marad a kérdés, hogy van-e 70×71-es megoldás, vagy ha nincs, akkor van-e 68×73-as megoldás, vagy ha nincs, akkor van-e 67×74-es megoldás, és így tovább.

Dolgozatunkat egy másik nyitott feladattal zárjuk. Az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... oldalú négyzetek közül szeretnénk a lehető legtöbbet — tehát folyamatosan az első n darabot — belehelyezni az $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$-os téglalapba. A mellékelt ábra mutatja az első 19 darab négyzet egy lehetséges elhelyezését. Mivel

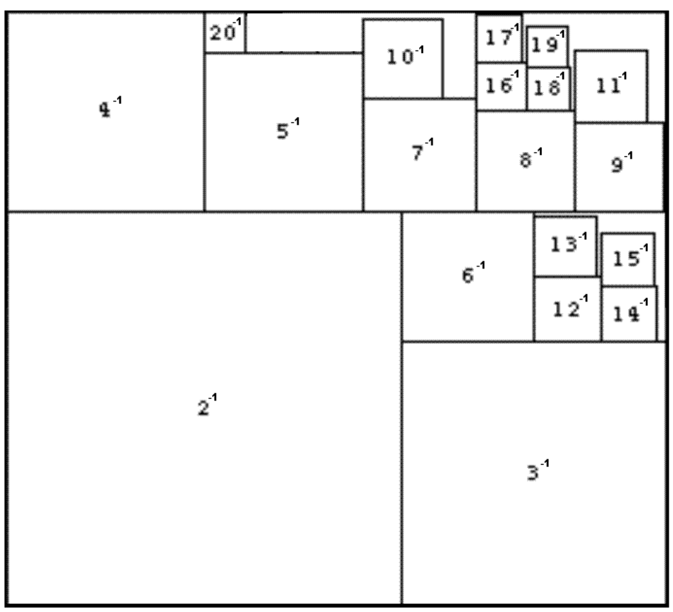
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8} = 0.625$$

és

$$\sum_{i=2}^{49} \frac{1}{i^2} = \frac{5999\,981\,177\,725\,428\,968\,146\,419\,650\,366\,179\,388\,228\,161}{9604\,076\,839\,297\,315\,498\,002\,557\,630\,759\,647\,800\,960\,000} \approx 0.624\,7$$

ezért „terület alapon” akár 48 darab négyzet is befér. Mi a legnagyobb n, amire van konstrukció az első n darab négyzet elhelyezésére?


17
21
20
14
16
5
7
1
2
15
11
12
13
8
10
18
9
6
3
4
24
23
19
22


20^{-1}
10^{-1}
17^{-1}
19^{-1}
16^{-1}
18^{-1}
11^{-1}
4^{-1}
5^{-1}
7^{-1}
8^{-1}
9^{-1}
13^{-1}
15^{-1}
6^{-1}
12^{-1}
14^{-1}
2^{-1}
3^{-1}

Hivatkozások:

Biró,M., and E. Boros,E.: *Network flows and non-guillotine cutting patterns.* Eur. J. Oper. Res. **16** (1984) 211–221.

Bitner, J., and Reingold, E.: *Backtrack programming techniques.* Comm. A.C.M. **18** (1975) p. 655.

Bouwkamp, C. J., Duijvestijn, A. J. W., and Medema, P., *Catalogue of simple squared rectangles of orders nine through fourteen and their elements.* Dept. Math. Techn. Hogeschool, Eindhoven, The Netherlands (1960).

Bouwkamp, C. J.: *On the dissection of rectangles into squares I.* Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **49** (1946) = Indag. Math. **8** (1946), 724–736, pp. 1176–1188.

Brooks, R. L., Smith, C. A. B., Stone, A. H., and Tutte, W. T.: *The dissection of rectangles into squares.* Duke Math. J. **7** (1940) pp. 312–340.

Chin, F. Y. L.: *Packing squares into a square*, J. Parallel and Distributed Computing **10** (1990) pp. 271–275.

Conway, J. H.: *Mrs. Perkins's quilt.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **60** (1964) pp. 363–368.

Czap, J.: *E-mail üzenetek* (2008).

Dehn, M.: *Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke*, Math. Annalen **57** (1903) pp. 314–332.

Dudeney, H. E.: *Amusements in mathematics.* New York: Dover (1917). Reprinted Mineola, NY: Dover (1958).

Duijvestijn, A. J. W.: *Electronic computation of squared rectangles.* Dissertation, Technische Hogeschool, Eindhoven (1962); also in Phillips Res. Reports 17 (1962) 523-612

Euler, L.: *Fermat tételének bizonyítása, hogy minden* $4n + 1$ *alakú prím két négyzetszám összege.*

`http://math.bme.hu/~hujter/euler.pdf`;

latinul: Eneström Index: **241**, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **5** (1754/5), 1761 pp. 3–15; újranyomtatva: Opera Omnia Series I vol. **2**, pp. 328–337.

Frederico, P. J.,: *Squaring rectangles ans squares: A historical review with annotated bibliography.* Graph Theory and Related Topics (Bondy,J.A., and Murty, U.S.R., eds) Academic Press (1979) pp. 173–196.

Gallai T.: *Négyzetfelosztások, hálózatok, gráfok.* Élő matematika – Tanulmányok (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest (1969), pp. 108–133.

Gardner, M.: *Mathematical Games: The problem of Mrs. Perkins' quilt, and answers to last month's puzzles.* Scientific American Magazine **215** (1966) pp. 264–272.

Gardner, M.: *The problem of Mrs. Perkin's quilt and other square-packing problems.* In *Mathematical Carnival.* New York: Alfred A. Knopf (1975) pp. 139–149.

Haubrich, J.: : *C.J. Bouwkamp en de Squared Squares* [holland; a cím angolul: *C. J. Bouwkamp and the squared squares*]. Nieuw Arch. Wiskd. **4** (2003) pp. 321–326.

Horváth G.: *Perfekt négyzetelt téglalapok és négyzetek*. Szakdolgozat a matematikus diploma elnyeréséért, Eötvös Loránd Tudományegyetem (1991) [témavezető: Hujter M.].

Hujter, M.: *Combinatorial optimization problems related to geometric packings and coverings* [angol]. Kandidátusi értekezés, Magyar Tudományos Akadémia (1992) Budapest.

Hujter, M.: *Improving a lower bound for online strip packing with modifiable boxes.* Proc. microCAD Internat. Sci. Conf. (2002), Miskolc, Egyetemváros, Hungary, Volume D: Basic Engineering Sciences (Eds.: Lehoczky, L., and Kalmár, L.) pp. 1–5.

Hujter, M.: *Put 24 noncongruent squares into the least-area-rectangle.* A part of a homepage (2002).

`http://math.bme.hu/~hujter/further.htm`

Hujter, M.: *Négyzetek reciprokösszege.* Kézirat (2007).

`http://math.bme.hu/~hujter/sorok3.pdf`

Korf, R.: *A new algorithm for optimal bin packing.* In Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-02). Edmonton, Alberta, Canada: AAAI Press (2001) pp. 731–736.

Korf, R.: *Optimal rectangle packing: initial results.* In Proceedings of the Thirteenth International Conference on Automated Planning and Scheduling. ICAPS (2003) pp. 287–295.

Korf, R.: *Optimal rectangle packing: new results.* In Proceedings of the International Conference on Automated Planning and Scheduling. ICAPS (2004) pp. 142–149.

Meschkowski, H.: *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry*, Oliver and Boyd. Edinburgh (1966).

Moroń, Z.: *Ó rozkładach prostokatów na kwadratý* [lengyel; a cím angolul: On the Dissection of a Rectangle into Squares]. Preglad Mat. Fiz. **3** (1925) pp. 152–153.

Mullin, A. A.: *On arithmetic aspects of geometric problems.* Amer. Math. Soc. Notices **25** (1978) A-227.

Pegg, E. Jr.: *Square Packing* (2003).

`http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_12_01_03.html`

Stein, S.: *Mathematics: The man-made universe* (2nd ed.). Freeman and Co., San Francisco (1969).

Steinhaus, H.: *Matematikai kaleidoszkóp*, Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest (1951). A fordítás Dessewffy O. munkája az átdolgozott szovjet könyv alapján. A magyar változathoz Kárteszi F. és Emődi É. illesztettek függeléket. Angol nyelvű kiadás: Steinhaus, H.: *Mathematical snapshots. With a new preface by Morris Kline.* 3rd Am. ed., rev. and enl. Reprint, Galaxy Book

726. Oxford etc.: Oxford University Press. VII, 311 p.(1983). Legfrissebb magyar nyelvű kiadás: Steinhaus, H.: *Matematikai kaleidoszkóp*, Pataki János fordítása,Gondolat Könyvkiadó, Budapest (1984).

Stewart, I.: *Squaring the Square*. Scientific American (1997) pp. 74–76.

Trustrum, G. B.: *Mrs Perkins's quilt*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **61** (1965) 7–11.

Tutte, W.: *Squaring the square*, Canadian J. Math. **2** (1950) pp.197–209.

Tutte, W.: *The quest of the perfect square*, The American Mathematical Monthly **72** (1965) pp. 29–35.

Watson, G. N.: *The problem of the square pyramid*. Messenger **48** (1918) pp. 1–16.