

Megemlékezés.¹

Irta: TURÁN PÁL.

A háború vihara több, mint 4 éve elült. Szétzilálta a matematikusok kis táborát és a felszabadulás nagyon megritkult sorokat talált itthon. Az örök remény késleltette velünk a seregszemlét eddig, várva, talán még előkerül egy-egy drága barát. A remény lassan szertefoszlott és ma, történelmünk egyik leggyászosabb napjának évfordulóján, a kis tábor veszteségei könnyörtelen élességgel rajzolódnak elénk. Néhányuknak jutott csak nyugodt, zavartalan munkában eltöltött életpálya osztályrészül; majdnem mind kora halállal távoztak el a faszizmus sok millió más áldozatával együtt. Nehéz megállni, hogy korai halálukért meg ne bélyegezzük és tetemre ne hívjuk azokat, akik a tébolyt, az erőszak és gátlástalan hazugság áradatát zúdították a világra, akik a legaljasabb ösztönök felszabadításától sem riadtak vissza céljaik érdekében. De ezekről keveset mondani több, mint sokat; azon halottaink, kiknek földi maradványai kisebb területre nem lokalizálhatók, mint Dontól Borig és Buchenwaldig, némaságukban meggyőzőbben szólnak azokhoz, akik legalább a halál tanúságtételét tudomásul veszik.

Hogy sírjaik hol domborulnak, legnagyobb részükről nem is tudjuk. Így hát tekintetünket csak szellemükre függeszthetjük és munkájukon való szemlével lobbanthatjuk azt életre újra és újra. Így azon tanártársainkról, akik a matematika előbbrevitele helyett inkább a tanítás áldozatos feladatát vállalták, e helyütt nem esik szó; az ő emléküik tanítványaik hálás lelkében tovább él.

A sápadt halál nem sokat válogatott; elvitt 19 éves ifjút, 91 éves aggot, pályája elején állót, akinek épp csak oroszánkörmei kimutatására jutott ideje, és kiérett munkásságú matematikust. Elöljáróban legyen szabad felsorolnom a szomorú névsort.

Aczél Ervin, Arany Dániel, Ádám István, Bauer Mihály, Beke Manó, Csillag Pál, Faragó Andor, Feldheim Ervin, Grünwald Géza, Jelítai József, Kerékjártó Béla, Klug Lipót, König Dénes, Krausz József, Lázár Dezső, Rados Gusztáv, Sándor Gyula, Schweitzer Miklós, Sidon Simon, Sólyi Antal, Szücs Adolf, Valkó István, Veress Pál, Waldapfel László.

Ezen matematikusok munkássága olyan sokrétű és változatos, hogy egyetlen előadásban még csak érinteni is lehetetlen munkásságuk lényeges eredményeit. Ezért társulatunk további

¹ A Bolyai János Matematikai Társulatban 1949. márc. 19-én elhangzott előadás.

előadásokat tervez, melyekben a tanítványok és barátok kívánnak az elhunytak emlékéhez járulni és a szellemi portrét néhány ecsetvonással személyibbé tenni; akikről tehát ezen előadás további folyamán nem történik többé említés, azok emlékére külön előadás van készülöben.

Így hát a fiatalabb nemzedékhez tartozó matematikusok, javarészt szeretett barátaim azok, akikről most megemlékezem. Lázár Dezsőhöz tízéves barátság kapcsol, egyetemi éveinktől kezdődőleg, melyeket ő a szegedi egyetemen töltött, vakációjában időzvéen csak Pestszentlőrincen, a szülői házban. A harmincas évek légköre nagyon megviselte amúgyis érzékeny idegzetét és felelős egyenetlen matematikusi fejlődéséért. E légkör megviselte, de nem törte meg és nem tette megalkuvóvá. Tiszti vizsgáján pl., mint mesélte, azért bukott el, mert nem volt hajlandó azt állítani, hogy a hiperbola két parabola. Hogy mikor gyakori lehangoltságának okai, mi, barátai se egykönnyen szedtük ki belőle. Nem volt természete a panaszkodás.

Geométernek indult, de főérdeklődése hamar az analízishez és a halmazelmélethez fordult. 1936-ban jelent meg legnevezetesebb cikke a *Compositio Mathematica*-ban. Itt a következő, az interpoláció elméletével kapcsolatban az előadó által felvetett, halmazelméleti problémával foglalkozik. A $[0,1]$ intervallum minden egyes x pontjához ugyanezen köz véges sok *más* pontja van hozzárendelve. Két pont függetlennek neveztetik, ha egyik sincs a másik képei között. A kérdés az volt, vajjon van-e $[0,1]$ -ben megszámlálhatóan végtelen sok pont úgy, hogy ezek páronként függetlenek legyenek. Miután ezt Grünwald Géza bebizonyította, Lázárnak sikerült kimutatnia, hogy kontinuumnyi sok ilyen pont is létezik itt. E bizonyítást Erdős elmondotta azon melegében Neumann Jánosnak, aki akkor Pesten volt látogatóban és ő rögtön elkérte azt a *Comp. Math.* számára. Tételét és módszerét hozzákapcsolódva Sierpinski, Sophie Piccard és Ruzewicz általánosították. A lengyel matematikusok ebből alakították ki a binár relációk tanának nevezett elméletet. 1939-ben már König Dénes ezen elmélet egy referátumának megírására szólította fel Lázárt, mely a *Mat. Fiz. Lapokban* lett volna megjelenendő; erre azonban az asztalosinaskodás mellett, melyre akkoriban kényszerült, nem volt lelkiereje. Az ezirányú irodalom egy vázlata Erdősnek egy idevágó megjelenendő cikkében lesz található.

Lázár ezen bizonyítása olyan rövid és szellemes, hogy legyen szabad vázolnom. Jelölje $\varphi(x)$ az x pont valamelyik képét. Mivel $x \neq \varphi(x)$, minden x köré fektethető egy köz, mely x -nek egyetlen képét sem tartalmazza; ezt megválaszthatjuk úgy is, hogy végpontjai racionálisak legyenek. Állítás, hogy ezen közök

közül van o'yan, mely kontinuumnyi sok x -hez tartozik. U. i. az x pontok száma kontinuumnyi sok, míg a hozzátartozó közöké csak megszámlálhatóan végtelen; ha tehát egy fix intervallumhoz tartozó x pontokat egy halmazba egyesítjük és ezen halmazok mindegyike kontinuumnál kisebb számosságú volna, akkor a $[0,1]$ intervallum, tehát egy kontinuum, felbonlana megszámlálhatóan végtelen, kisebb számosságú halmaz összegére; de ez ellentmond König Gyula ismert tételének. Így tehát tényleg van oly köz, mely kontinuumnyi sok ponthoz lett így hozzárendelve. De ekkor már készen vagyunk; u. i. azon x pontok, melyekhez e köz tartozik, a közben vannak a definíció szerint, a képek pedig *kívüle*, ugyancsak a definíció szerint.

Lázár 1941-ben Kolozsvárra került az ottani zsidó gimnáziumba tanáinak. 1942-ben egy munkásszázaddal Oroszországba vitték, ahol állítólag egy comblovástól elvérzett alig 30 éves korában. Feleség és két gyermek maradt utána, akik Kecskemétre költöztek azután, az asszony szüleihez. Őket innen, Lázár szüleit Pestszentlőrincről deportálták; a kis Buxsi fia azon a képen, melyen apja büszkén szorítja magához, bizony nem igen sejtette, hogy röpke öt év és Lázár nővérén kívül hírmondó sem marad a népes családból.

Schweitzer Miklós jóval fiatalabb volt. 1941-ben érettségizett, az ugyanezen évben rendezett Eötvös Lóráud matematikai tanulóversenyen második lett és 1945 jan. 28-án, néhány nappal azután, hogy megérhette a felszabadulást, melyet anynyira várt, egy német golyóval a testében közel a fogaskerekű vasúthoz érezhette, hogy leghőbb vágya, szabályosan felvett egyetemi hallgatónak lehetni, nem teljesülhet sohasem. A közbülső rövid idő adatott csak neki, rövid idő nagyon, viharos és bizonytalan. De Schweitzer jól sáfárkodott vele. Már 1942 végén közölte velem azon tételeit, melyek halála után, 1947-ben lettek a Szegedi Actában publikálva. Mielőtt ismertetésére rátérnék, megemlítem azt a klasszikus tényt, hogy egy függvény, mely a $z=0$ hely egy környezetében reguláris, ott $\sum a_n z^n$ hatványsorral egyértelműen előállítható és azon kevésbbé ismert másik tényt, melyet Ritt vett észre és mely szerint, ha $f(0)=1$, e függvény ugyan csak egyértelműen előállítható $\prod_1^\infty (1+b_n z^n)$ alakban $z=0$ egy környezetében. Tegyük fel, hogy a két alakzat $f(z)$ -t az egységkörben állítja elő és még $\sum_1^\infty a_n$, illetőleg $\prod_1^\infty (1+b_n)$ konvergenssek. Abel klasszikus tétele szerint $\sum_1^\infty a_n z^n$ radiális limese létezik és egyenlő $\sum_1^\infty a_n$ -vel. Hardy vetette fel a kérdést 1909-ben, tehát jóval

Ritt felfedezése előtt, hogy vajjon a Ritt-féle szorzatelőállításra is igaz-e Abel tételének analogonja és azt a meglepő tényrt találta, hogy a b -k meghatározhatók úgy, hogy $\prod_{v=1}^{\infty} (1 + b_v) = A$ konvergens és mégis $x \rightarrow 1$ -re $\prod (1 + b_v x^{k_v}) \rightarrow 2A$. Schweitzernek sikerült azon sejtést bebizonyítani, hogy miként a $\sum a_v x^{k_v}$ hatványsorok helyett $\sum a_v x^{2^v}$ -t véve a teoria lényegesen egyszerűsödik, úgy a $\prod (1 + b_v x^{2^v}) = g(x)$ szorzatra Abel tételének teljes analogonja fennáll, azaz $\prod_{v=1}^n (1 + b_v) \rightarrow A$ -ból következik, hogy $\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = A$. Dolgozatában Schweitzer azután saját maga is vet fel két további nagyon érdekes kérdést. Az egyik az, hogy a 2^v exponensek a növekvő egész számoknak milyen más $k_1, k_2, \dots$ sorozatával helyettesíthetők, hogy ugyanezen konklúzió fenntartható legyen; azt a nagyon érdekes tételt találta, hogy ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$(1) \quad \frac{k_1 + \dots + k_n}{k_n} < K$$

ahol K nem függ n -től. Különösen a szükségesség bizonyítása az, ami nagy leleményességet igényel. A másik kérdése a tétel megfordítása; tehát ha $g(x) = \prod_{v=1}^{\infty} (1 + b_v x^{k_v})$ exponensei (1)-et

teljesítik, akkor $\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = A$ -ból következik-e a $\prod_{v=1}^{\infty} (1 + b_v) \rightarrow A$ reláció. Mint a hatványsorok elméletéből ismert, az ilyen megfordító tételek, az ún. Tauber-típusú tételek, jóval nehezebbek és az együttthatókra vonatkozó speciális feltevések nélkül nem is igazak. Ezt mutatja pl. az

$$1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1+x} = f(x)$$

esete, ahol $x \rightarrow 1$ -re $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ és az együttthatók sora nem konvergens, hisz az egyes tagok sem tartanak a 0-hoz. Mint az

$$f(x) = (1-x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots = \frac{1}{1+x}$$

mutatja, a megfordítás még az (1) feltételt kielégítő $f(x)$ -ekre sem igaz általában. Mármint Schweitzer kimutatta, hogy ha $b_n \rightarrow 0$, akkor már igaz a keresett megfordítás. A sok invenciót és erőt mutató bizonyítások részleteire vonatkozólag Schweitzer dolgozatára magára kell utalnom.

Ezen értekezése elsősorban Schweitzer kérdésfelvető és feleletet intuitive meglátó képességéről tesz tanúságot; ez annál is inkább áll, mert az (1) típusú hézagfeltétel tudomásom szerint nem szerepel az irodalomban. Egy további értekezése, melyet Fejér Lipót és Szegő Gábor rendeznek sajtó alá és megjelenés előtt áll, a nagyerejű analistát mutatja be. Ebben Fejér azon vizsgálataihoz kapcsolódik, melyek a monoton együtthathós trigonometrikus és hatványsorok új, meglepő tulajdonságait hozták felszínre. Így többek között azt, hogy ha

egy $f(z) = \sum_1^{\infty} a_v z^v$ hatványsor $|z| < 1$ -ben konvergál és négyszeresen monoton együtthathós, azaz

$$a_v \geq 0, a_v - a_{v+1} \geq 0, a_v - 2a_{v+1} + a_{v+2} \geq 0, a_v - 3a_{v+1} + 3a_{v+2} - a_{v+3} \geq 0, a_v - 4a_{v+1} + 6a_{v+2} - 4a_{v+3} + a_{v+4} \geq 0, v = 0, 1, \dots$$

akkor ez az egységkörnek egyrétű leképezését adja. Miután Szegő és Sidon példákon egymástól függetlenül kimutatták, hogy a tétel nem igaz, ha a négyszeres monotonitás helyett csak kétszeres áll fenn, Szegő egy, a háború alatt megjelent, dolgozatában kimutatta, hogy a tétel igaz marad háromszoros monotonitás esetén is. Erről a háború alatt csak a Fortschritte referátumából szerezhethetvén tudomást, Rényi és Schweitzer a referátumból rekonstruálták Szegő bizonyítását. A bizonyítás az

$$(2) \quad 1 + 2 \cos t + \dots + 2 \cos nt + \dots$$

sor iterált részletösszegeinek több érdekes tulajdonságára van alapozva. $x = \cos t$ helyettesítéssel e sor az

$$(3) \quad 1 + 2T_1(x) + \dots + 2T_n(x) + \dots$$

sorba megy át, ahol $T_n(x)$ az n -edik Csebisev-polinom; egyszer a (2), egyszer a (3) alak célszerűbb. A (2) sor $S_n^{(0)}(t)$ részletösszegei a Fourier-sorok elméletében szereplő ún. n . Dirichlet-magok; azt a nevezetes tényt, hogy a (2) sor $S_n^{(1)}(t)$ elsőrendű iterált részletösszegei nem-negatívak, Fejér fedezte fel 1900-ban. Ezen nem-negativitás a további iterációval nyert $S_n^{(2)}(t)$ és $S_n^{(3)}(t)$ másodrendű, ill. harmadrendű iterált összegekre természetesen szintén fennáll. Ugyancsak Fejér vette észre, hogy az $S_n^{(3)}(t)$ polinomok ezenfelül a $0 < t < \pi$ közben monoton fogyanak; ez az alapja föntemlített egyrétűségi tétele bizonyításának. Mint ő megjegyezte az analóg tétel az $S_n^{(2)}(t)$ polinomokra nem igaz, amennyiben a $\delta \leq t \leq \pi - \delta$ közben (δ tetszőlegesen kicsire választható rögzített pozitív szám)

$$\frac{dS_n^{(2)}(t)}{dt} = - \frac{1}{2n \sin^3 \frac{t}{2}} \left[2 \cos \frac{t}{2} + \cos(2n+3) \frac{t}{2} + \eta_n(t) \right]$$

ahol $r_n(t) \rightarrow 0$ e közben egyenletesen; ez adja, hogy $S_n^{(2)}(t)$ minden elég nagy n -re $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$ bármily kis részközén, így $\frac{2}{3}\pi < t \leq \frac{2}{3}\pi + \delta$ -ban jelet vált. Ezen előállításból az is következik, hogy viszont minden $\delta \leq t \leq \frac{2\pi}{3} - \delta$ közben elég nagy n -re $\frac{dS_n^{(2)}}{dt}$ negatív, vagy — ami ugyanaz — a (3) alatti sor $S_n^{(2)}(x)$ másodrendű iterált részletösszegei a $-\frac{1}{2} + \delta \leq x \leq 1 - \delta$ közben monoton nőnek, ha n elég nagy. Mármost Szegő egyik lényeges segédtétele említett tétele bizonyításánál az, hogy a $-0.4 \leq x \leq 1$ közben az $S_n^{(2)}(x)$ polinomok minden n -re monoton nőnek; Schweitzernek sikerült kimutatni azon erősebb tételt, mely szerint e polinomok a nagyobb $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ közben is monoton nőnek, mely e szerint már nem javítható. Bár e ténynek eddig nincs alkalmazása, de önmagában is érdekes és a bizonyítás bravuros kis remekmű, melynek ötleteit itt lehetetlen reprodukálni a rendelkezésemre álló rövid időben. Mivel $S_n^{(2)}(t)$ analitikusan előállítható zárt alakban, meglepő, hogy a kérdés nehéz. Mint Fejér kifejezte, e kérdés, mely tehát a

$$\cos t + \cos 2t + \dots$$

sor másodrendű iterált részletösszegeinek monotonitására vonatkozik, equivalens azzal, hogy a

$$\frac{(2n-1) \sin t - \sin (2n-1)t}{\sin^3 t} \quad n=2, 3, \dots$$

függvények $0 < t < \frac{\pi}{3}$ -ban monoton fogynak, megjegyezvén, hogy az analog kérdés a

$$\cos t + \cos 3t + \dots$$

sor másodrendű iterált részletösszegeire vonatkozólag equivalens az

$$\frac{n \sin t - \sin nt}{\sin^3 \frac{t}{2}} \quad n=2, 3, \dots$$

függvények monotonitásával, mely utóbbi igaz $0 < t < \pi$ -re. Ez is mutatja, hogy a kérdés mély.

A poétalelkű Aczél Ervinnek legalább megengedett, hogy egyetemre járhasson és közvetlenül doktori szigorlata előtt pusztulhasson el löszervivés közben 1942. szept. 22-én az

oroszországi Pjen községben. Így hát az ő életműve is torzó maradt. Feljegyzésben fennmaradt szép doktori értekezése Fejérnek az interpoláció elméletére vonatkozó vizsgálataihoz kapcsolódik. Ezzel kapcsolatban legyen szabad emlékezetükbe idéznem ezen, Newtonnal meginduló, elmélet alapfogalmaiból annyit, amennyi Aczél eredményeinek helyes értékeléséhez szükséges. Ha adva van — az általánosság rovása nélkül a $[-1, +1]$ közben — n különböző pont²

$$(4) \quad -1 \leq x_n < \dots < x_1 \leq 1$$

és

$$f_n, \dots, f_1$$

ordináták, akkor van egyetlen olyan, legfeljebb $(n-1)$ -edfokú, polinom, mely az (x_v, f_v) pontokon átmegy. Ha tehát adva van

$$A \equiv \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

mátrix, akkor minden, a $[-1, +1]$ -ben értelmezett, $f(x)$ függvényhez tartozik egy polinomsorozat

$$L_n(f) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

úgy, hogy

$$L_n(f)_{x=x_v} = f_v \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Ezen sorozatot nevezzük $f(x)$ -nek A -hoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjainak. Ezek viselkedése függ úgy $f(x)$ -től, mint az alapul vett A mátrixtól. A fontosabb mátrixok közül itt négyet említek fel.

a) az equidisztans E -mátrix, melynél az n -edik sort az

$$x_v^{(n)} = 1 - \frac{2}{n+1}v \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

pontok adják;

b) a P -mátrix, melynél az n -edik sort a

$$P_n(x) = \{(x^2 - 1)^n\}^{(n)}$$

Legendre-polinomok n gyöke adja;

c) a T -mátrix, melynél az n -edik sort az n -edik Csebisev-polinom gyökei adják. Mivel

$$T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta,$$

az n -edik sor elemeit az

² A felső indexeket, ahol nem okoz elhagyásuk félreértést, mellőzzük.

$$x_v^{(n)} = \cos \frac{(2v-1)\pi}{2n}$$

számok adják;

d) a II -mátrix, ahol az n -edik sort az

$$\int_x^1 P_{n-1}(t) dt = 0$$

polinom gyökei adják; ezek között van persze $x = \pm 1$ is.

Sokáig az hitték, hogy az E -mátrix a legcélravezetőbb. Gauss vette észre az úgynevezett mechanikus quadratura elméletében, hogy a P -mátrix alkalmazásának bizonyos előnyei vannak; egy szempont, melyet Jacobi, Csebisev és Stieltjes vittek lényegesen előbbre a múlt században. Csak a múlt század végén vették észre Runge és Borel, hogy az E -hez tartozó polinomsorozat oly egyszerű függvény esetén is divergens lehet a $[-1, +1]$ köz egy alkalmas részintervallumában, mint $\frac{1}{1+x^2}$. Természetszerűleg felmerült tehát az a kíváncsiság, az E -t olyan más A mátrixszal helyettesíteni, hogy a hozzá tartozó interpolációs polinomok egyenletesen konvergáljanak minden olyan $f(x)$ függvényre, mely a $[-1, +1]$ közben folytonos. Erre vonatkozólag Faber 1910-ben azt a meglepő tényrt találta, hogy ilyen mátrix nincs. Mármint Fejér 1915-ben azt vette észre, hogy ha az $L_n(f)$ polinomok helyett azon $H_n(f)$ polinomsorozatot tekintjük, melynél $H_n(f)$ legfeljebb $(2n-1)$ -edfokú és

$$H_n(f)_{x=x_v} = f_v, H'_n(f)_{x=x_v} = 0,$$

akkor a P -, ill. T -mátrixok esetén ezek egyenletesen konvergálnak $f(x)$ -hez, ha csak az folytonos a $[-1, +1]$ közben. Ehhez kapcsolódva Aczél az $(n-1)$ -edfokú, ill. $(2n-1)$ -edfokú polinomok közötti hézagot szűkítendő azzal a kérdéssel foglalkozott, hogyan viselkedik azon $A_{n,r}(f)$ polinomsorozat, melynek foka rögzített n -re $\leq 2n-2$ és melyre

$$\begin{aligned} A_{n,r}(f)_{x=x_v^{(n)}} &= f_v & (v=1, \dots, n) \\ A'_{n,r}(f)_{x=x_v^{(n)}} &= 0 & (v=1, \dots, n; v \neq r). \end{aligned}$$

Ezen $x_v^{(n)}$ alappontokat fogjuk kivételes alappontoknak nevezni. Tekintsük azt az esetet, mikor e kivételes alappontok a $[-1, +1]$ köz egy belső α helyéhez sűrűsödnek. Aczél azt az érdekes tényrt vette észre, hogy ezen $A_{n,r}(f)$ polinomok már nem szükségképpen konvergálnak egyenletesen $f(x)$ -hez a $[-1, +1]$ közben. Sőt még nem is konvergálnak szükségképpen $f(x_0)$ -hoz minden rögzített x_0 helyen. Ha pl. $f(x) = x$ és

$x_0 = \cos \frac{\pi}{5}$, akkor e helyen az $A_{n,r}(f)$ polinómok véges határok között oszcillálnak, a nélkül, hogy egy limeshez tartanának, ha a kivételes alappontok $\rightarrow \cos \frac{\pi}{5}$. Azt találta továbbá, hogy e polinomok akkor és csak akkor konvergálnak egyenletesen $f(x)$ -hez függetlenül az α sűrűsödési helytől, ha

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

Ha az α helyet kizárjuk, akkor, mint azt vele egyidejűleg és tőle függetlenül Feldheim is bebizonyította, a konvergencia egyenletes lesz a $[-1, \alpha - \varepsilon]$ és $[\alpha + \varepsilon, 1]$ közökben. Ugyanezen tételeket kimutatja a Π -mátrix esetén is; itt, mint különös új eredmény az, jelentkezik, hogy a $[-1, +1]$ -ben való egyenletes konvergencia szükséges és elégséges feltételül az $f(1) = f(-1)$ reláció adódik, tehát ebbe nem jönnek bele $f(x)$ -nek összes értékei, mint előbb!

Waldapfel László egyetlen publikált értekezése a Mat. Fiz. Lapok 50. kötetében 1943-ban jelent meg. Egy lábjegyzet közli dolgozatának első oldalán, hogy szellemi szülöttét sohasem láthatta: „A keleti fronton elesett 1942. dec. 11-én 31 éves korában. Lapunkhoz beküldött első és egyben utolsó dolgozatát Rédei László volt szíves az itt következő végleges alakra átírni.” Egyszerűségükben is megilletődött és szívszaggató sorok ha nem is mondják ki kereken — amit akkor nem is lehetett —, hogy Waldapfel Lászlót a fasizmus dobta fegyvertelenül a keleti frontra. Az értekezés Schruttkának azon dolgozatához kapcsolódik, melyben az meghatározza n elem azon permutációinak számát, melyben adott sokszor fordul elő, hogy egy elemet egy nála kisebb követ; itt és a következőkben a permutáció elemei legyenek az 1, 2, ... egész számok. Vagy ha pl. $n=5$ esetén az 1 4 5 3 2 permutációhoz hozzárendeljük a nyilaknak

5)

→ → ← ←

(rendszerét, akkor a Schruttká által megoldott kérdés abban áll, megadni pontosan n elem azon permutációinak számát, melyekben a ← jel adott sokszor szerepel. Waldapfel azt az általánosabb kérdést vetette fel — mely a kombinatorikus analízis virágkorában speciális esetekben már tárgyalatott — hogy n elemnek hány olyan permutációja van, melynél az $(n-1)$ elemből álló (5) sorozat, ahogy ő nevezi, a permutáció profilja, egy előírt sorozat. Waldapfelnek sikerült egy rekurzív formulát találnia, mely André régebbi speciális formuláját

magában foglalja. Eredménye igen egyszerűen fogalmazható, ha egy pár célszerű jelölést vezetünk be. Az adott profil egy $p = n - 1$ tagú

$$\Pi \equiv \rightarrow \rightarrow \leftarrow \dots \rightarrow \equiv (\pi_1, \dots, \pi_{n-1})$$

sorozat p.l.; az ezen profilhoz tartozó permutációk száma legyen $N[\Pi]$. Szükség van erre az $n=1$ esetben is, mikor is Π üres; jelöljük ezt szimbolikusan 0-lal és állapodjunk meg abban, hogy $N(0)=1$. Célszerű az $(a_1, \dots, a_n)$ Π -profilú permutációhoz hozzárendelni az

$$U \equiv a_1 \pi_1 a_2 \pi_2 \dots a_{i-1} \pi_{i-1} a_i \pi_i \dots \pi_p a_{p+1} \quad (p+1=n)$$

sorozatot. Különösen fontos szerepet játszanak azon i indexek, melyekre

$$a_{i-1} < a_i \text{ és } a_i > a_{i+1}$$

azaz

$$\pi_{i-1} = \rightarrow \text{ és } \pi_i = \leftarrow.$$

Ezen i indexeknek tehát az a tulajdonságuk van, hogy a_i szomszédjai mind a_i -nél kisebbek: ezen i -ket nevezi ütközőpontoknak. Az $i=1$ ütközőpont, ha

$$a_1 > a_2, \text{ azaz } \pi_1 = \leftarrow;$$

az $i=p+1$ ütközőpont, ha

$$a_p < a_{p+1}, \text{ azaz } \pi_p = \rightarrow.$$

Az ütközőpontok helyei tehát a Π profillal egyértelműen meg vannak határozva ezek száma legyen r . Legyen $1 \leq k \leq r$ és a k -adik ütközőpontot előzze meg U -ban p_k darab π ; ezáltal nyerjük π_{p_k} és π_{p_k+1} elhagyásával a

$$\Pi'_k = (\pi_1, \dots, \pi_{p_k-1}), \quad \Pi''_k = (\pi_{p_k+2}, \dots, \pi_p)$$

profilokat, melyek minden k -ra Π -vel meg vannak határozva. Egyike ezen profiloknak lehet üres; ha pl.

$$\pi_1 = \leftarrow,$$

akkor az első ütközőpont indexe 1, azaz $\Pi'_1 = 0$. Az általános esetben tehát Π'_k egy p_k -elemű permutáció profilja és Π''_k egy $(p - p_k - 1)$ -eleműé. Marmost Waldapfel tétele az, hogy

$$N(\Pi) = \sum_{k=1}^r \binom{p}{p_k} N(\Pi'_k) N(\Pi''_k),$$

vagyis az n elemből képezhető, adott Π profilú permutációk számának meghatározása az ütközőpontok meghatározása után vissza van vezetve alacsonyabb elemszámból képezett megadható profilú permutációk számának meghatározására.

Waldapfel ezen vizsgálatai érintkeznek Rédei általánosabb kombinatorikus vizsgálataival és ahhoz értékes adalékot szol-

gáltatnak; ő e kérdésekhez — úgy látszik — függetlenül jutott el. E téren még sok a tennivaló, de a haladás soha többé nem tudja már fellelkesíteni kihűlt szívét. Ahogy Juhász Gyula írta alkalmilag,

Elment. A mindenséggel egygyé lényegült,
Éltében nem sok jóban részesült,
Pár könyv s pár röpke boldog óra,
Korán hívtad, Halál, őt nyugovóra.

Ez még inkább áll Ádám Istvánra, akit nem egész 20 éves korában hívott el. Egy szép kis geometriai dolgozat maradt utána; ez azon Eötvös-versenyen kitűzött egyik feladatból sarjadt, mely versenyen 1943-ban első lett. Ezen Fejértől származó feladat annak bebizonyítását kívánja, hogy ha P az ABC hegyesszögű háromszögben van, akkor a kerületnek P -től való maximális távolsága, $D \geq$ mint a minimális d távolság duplája és egyenlőség csak a szabályos háromszög esetén áll fenn, ha P a körülírt kör középpontja. A kérdés úgy is fogalmazható, hogy ha két koncentrikus R , ill. r sugarú kör olyan, hogy egy ABC hegyesszögű háromszög az egyik körben benne van, a másikat pedig tartalmazza, akkor $R \geq 2r$. Mint Fejér diákkorában az 1897-es Eötvös-verseny egyik feladatát megoldva kimutatta, ugyanezen egyenlőtlenség áll, ha r ill. R a háromszög beírt, ill. köréírt körének sugarát jelenti; ez áll akármilyen (nemcsak hegyesszögű) háromszögre. Fejér azon további kérdést vetette fel, vajjon igaz-e a térben az analóg

$\frac{R}{r} \geq 3$ egyenlőtlenség, ahol R , ill. r egy adott tetraéder köré, ill. beírt gömbjének sugara. A megfelelő síkbeli egyenlőtlenségre több bizonyítás volt ismeretes, de ezek egyikét sem lehetett átvinni a térre. Ádám bizonyítása volt az első ilyen; hogy ez az „igazi” bizonyítás, azt a bizonyítás frappánsan egyszerű volta mellett az is mutatja, hogy szószerint átvihető térre. A bizonyítás a következő. Az ABC háromszög oldalfelező pontjai legyenek $A_1 B_1 C_1$. Ekkor $A_1 B_1 C_1$ köré írt kör sugara a hasonlóságból $\frac{R}{2}$. De mivel e körnek van közös pontja mindhárom oldallal, tehát ő a beírt kör egy az ABC -t magában foglaló, azzal homotetikus háromszögben. Vagyis $\frac{R}{2} \geq r$. Egyenlőség nyilván csak akkor lehetséges, ha az $A_1 B_1 C_1$ -en átmenő kör e pontban érinti az ABC háromszög oldalait, ami csak úgy lehet, ha ABC háromszög szabályos.

Ádám ezen eredményét azóta Fejes Tóth László két szép dolgozatban nagy mértékben általánosította. A síkra vonatkozólag

kimutatta, hogy ha egy konvex n -szög egy R sugarú körben van és egy r sugarú kört tartalmaz, akkor

$$\frac{R}{r} \geq \sec \frac{\pi}{n},$$

ahol az egyenlőség minden n -re a szabályos n -szögekre elérhető. A térbeli tételt a következő három módon általánosította.

1. Ha R , ill. r egy n -lapú konvex poliédert tartalmazó, illetőleg ebben bennefoglalt gömbök sugarai, akkor

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{(n-2)6},$$

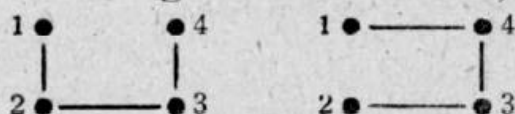
Ádám tétele ebből $n=4$ -re adódik.

2. Ugyanez az egyenlőtlenség áll, ha n -lapú poliéder helyett n -csúcsú áll. Mindkét tételben az egyenlőség jele nem érhető el n minden értéke mellett, sőt minden szabályos testre sem.

$$3. \quad \frac{R}{r} \geq \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{q},$$

ahol p az egyes lapok átlagos élszáma és q az egyes csúcsok átlagos élszáma. Tetraéderre ez is kiadja a Fejér—Ádám-féle egyenlőtlenséget. Az egyenlőség itt az összes szabályos testekre fennáll.

Krausz József zárja be azok szomorú sorát, akikről ma megemlékezünk. Ő is azon matematikusok népes táborába tartozott, akiket König Dénes impresszionált döntő módon matematikai fejlődésükben, felkeltvén érdeklődését a gráfelmélet és kombinatorika iránt. Főleg a gráfelmélet fogta meg, mely a való élet oly sok relációjából szűri ki a közös lényegét és melynek a matematika annyi más részével van érintkezési pontja. Doktori értekezését, mely egyetlen publikált dolgozata, szintén ezen tárgykörből írta. Hogy ennek eredményét megértsük, előrebocsátom a gráfelmélet néhány alapfogalmát. Egy gráfot a sík véges sok pontja, a gráf szögpontjai alkotnak, melyek közül bizonyosak össze vannak kötve egymással egy görbe által, mások nem; e görbék a gráf élei. Itt beszéljünk csak olyan gráfokról, melyekben két szögpont *legfeljebb* egy éllel van összekötve. Ilyen gráfok lehetnek különbözők, de strukturájuk azonos. Pl. a látható két gráf nem azonos,



mert egyikben az (1 4) él hiányzik, a másikban az (1 2) él; mégis a két gráf nyilván strukturálisan azonos. Két gráf akkor strukturálisan azonos, homeomorf, ha szögpontjaik és éleik megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy a megfeleltetett élek végpontjai is megfelelő pontok legyenek. Ez persze maga

után vonja azt, hogy egy csúcsban összefutó élek képei is összefutók. A homeomorfia megállapításánál természetes az a törekvés, hogy már abból, hogy az élek a két gráfban megfeleltethetők egymásnak egy-egyértelműen úgy, hogy összefutó éleknek az egyik gráfban összefutó élek felelnek meg a másikban, következtetni tudjunk a két gráf homeomorfiájára. Hogy ez azonban általában nem igaz, azt az alábbi két gráf mutatja;



vagyis az élek ilyen leképezhetőségéből még a csúcsok számának egyenlősége sem következik. Mármost Whitney azt a meglepő tételt találta, hogy ha ezen két gráftól eltekintünk, akkor már a két gráf éleinek egymásra való ilyen leképezhetőségéből a két gráf homeomorfiája *következik*. E szép tételnek Krausz egy új, egyszerűbb bizonyítását adta doktori dolgozatában; de még ez sem elég rövid ahhoz, hogy itt ismertethessem. Dolgozatának végén módszerének további alkalmazásait ígéri meg; ezek azonban vele együtt pusztultak el egy auschwitz-i gázkamrában 1944-ben, ahová Nagyváradról vitték el. Itt volt állásban 1941 óta, mint gimnáziumi tanár. Hogy egyéb publikálatlan kombinatorikus eredményei is voltak, azt többek közt egy szép kombinatorikus feladata mutatja, amit a Mat. Fiz. Lapokban közölt. Most már nyugszik ő, a nyughatatlan, mindig tréfás fiú, éppúgy, mint Aczél Ervin, barátja és társa az irodalmi és matematikai tervezgetésben, álmokban, amikből a kegyetlen valóság oly keveset engedett megvalósulni.

Nyugszanak mind ők. Nem érhatték meg az időt, mikor a Kain-bélyeget levették volna róluk és tehetségükhöz méltó helyet foglalhattak volna el újjáépülő hazánkban és velünk, a megmaradottakkal együtt, vállvetve dolgozhattak volna egy új világ felépítésén. Tragédiájuk tragédia katharsis nélkül. Milyen bűnért lakoltak, milyen erkölcsi világrenddel kerültek összeütközésbe? Kérdések, melyekre a felelet nagyon is világos. Végso sóhajításuk, színültig telve a beteljesületlen élet feletti szomorúsággal, rég elszállott a mindenségbe és kering ott egyre gyengülő intenzitással, de elég erősen ahhoz, hogy újra és újra regisztráltassék barátaik szerető szívében.

Речь, посвящённая памяти венгерских математиков, умерших во время войны, вследствие преступлений фашистов.

Lecture to the memory of those Hungarian mathematicians who died during the war.