

Haladvány Kiadvány 2023.10.20

## A szabályos 12-szög dülényekre bontása

Hujter Mihály [hujter.misi@gmail.com](mailto:hujter.misi@gmail.com)

Kabai Sándor [unico.kabai@gmail.com](mailto:unico.kabai@gmail.com)

Ajánlás: *Holló-Szabó Ferenc* (1965–2022) emlékére.

A rombusz régi magyar neve: *dülény*. A Czuczor–Fogarasi szótár szerint olyan négyszög, melynek oldalai egyenlő nagyságúak. Az első ábrán egy olyan szabályos 12-szög (angolul: *dodecagon*) dülényekre bontása látható, ahol a rombuszok mindegyike egységnyi hosszúságú, a 12-szög oldalhosszúsága pedig 2 egységnyi. A rombuszok közül az egyik fajta négyzet, a másik fajta 60-fokos hegyesszögű, a harmadik fajta pedig 30-fokos hegyesszögű. A négyzet területe 1 egység, a 30-fokos

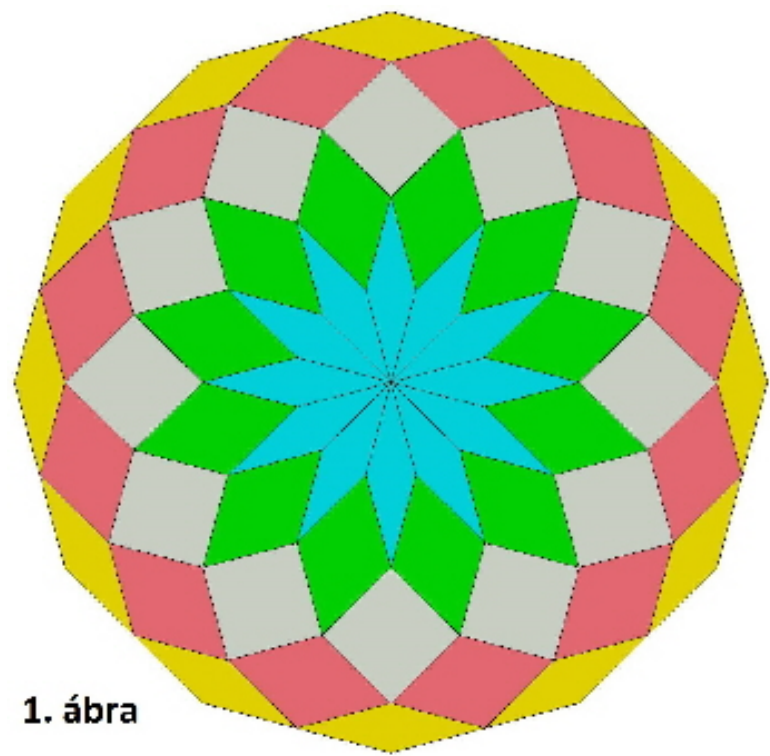
rombuszé  $1/2$  egység, a 60-fokosé pedig  $\sqrt{3}/2$  egység. A felbontás érdekessége, hogy 12 példányban tartalmazza az 1 egységnyi élű szabályos 12-szög felbontását 3 négyzetre, 6 darab 60-fokos és 6 darab 30-fokos dülényre. Mellékeredmény: Az 1 egységnyi oldalú szabályos tizenkétszög területe:

$$3 + 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = 6 + 3\sqrt{3}$$

További érdekesség, hogy az ábra közepén látható 12 darab 30-fokos dülénynek a középponttól legtávolabbik csúcsa éppen egy 1 egységnyi élű szabályos 12-szöget alkot. Ezen tizenharmadik dodecagonnak a területére is megkapjuk a fenti képletet, hiszen

$$12 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 + 3\sqrt{3}$$

Ez a képlet *Kürschák József* (1864–1933) híres mozaikjából is kiolvasható. A második ábrán megmutatjuk, hogy a szabályos 12-szöget Kürschák 60-fokos és

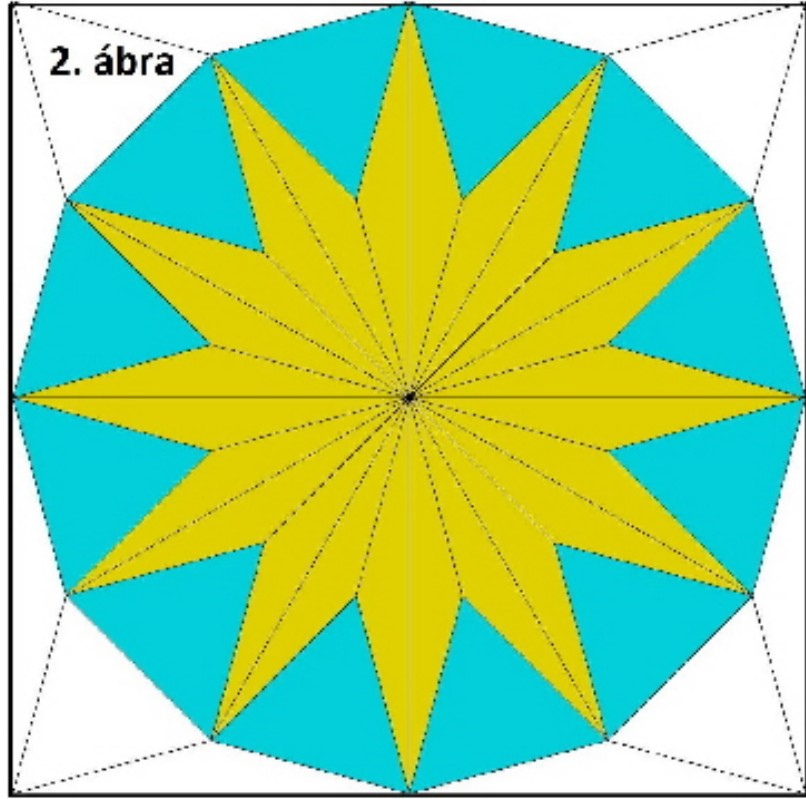


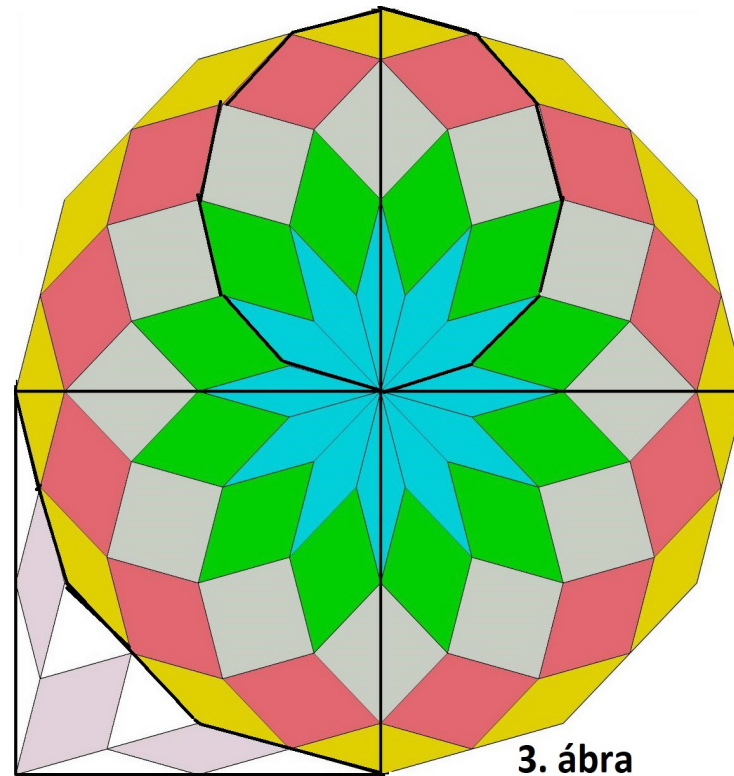
1. ábra

150-fokos, 1 egységnyi szárú egyenlőszárú háromszögekre bontotta. A felhasznált háromszögeknek éppen a harmada elegendő ahhoz, hogy a 12-szöget olyan négyzetre egészítsük ki, melynek oldalhosszúsága megegyezik a 12-szög leghosszabb átlójával. Ez az átlóhosszúság pedig kétszerese a 150-fokos egyenlőszárú háromszög alapja hosszának, azaz  $2 \cdot 2 \cdot \sin 75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ . Ezen szám négyzetének háromnegyede pedig éppen

$$\frac{3}{4} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 3\sqrt{3}$$

Végül megjegyezzük, hogy az első ábra alapján is szemmel láthatóvá tehető, hogy az egységnyi élű szabályos dodecagon legnagyobb átlójára rajzolt négyzet többletterülete a dodecagonhoz képest éppen a dodecagon területének harmada. Az utolsó ábrán megmutatjuk, hogy a kiegészítéshez éppen 4 darab 30-fokos és 2 darab 60 fokos dülényre van szükség. Mivel 2 darab 30-fokos dülény területazonosság alapján átváltható 1 darab négyzetre, készen vagyunk, hiszen 1 négyzet, 2 darab 60-fokos és 2 darab 30-fokos dülény éppen az 1 egységnyi oldalú szabályos dodecagon harmada.





3. ábra

## Hivatkozások:

Dodecagon - szócikk, Wikipédia.

<https://en.wikipedia.org/wiki/Dodecagon>

Dülény – szócikk. Czuczor G.; Fogarasi J.: A magyar nyelv szótára, Emich Gusztáv magyar akadémiai nyomdásznál, Pest, 1862.

<https://www.arcanum.com/hu/online-kiadvanyok/Lexikonok-a-magyar-nyelv-szotara-czuczorfogarasi-55BEC/d-5AC9E/duleny-5B5E9>

Holló-Szabó Ferenc – szócikk. História Tudósnapár – Természettudósokhoz kapcsolódó évfordulók.

<https://tudosnapar.kfki.hu/historia/egyen.php?nanev=hollosz>

Kürschák József – szócikk. História Tudósnapár – Természettudósokhoz kapcsolódó évfordulók.

<https://tudosnapar.kfki.hu/historia/egyen.php?nanev=kurschak>

Holló-Szabó, Ferenc; Kabai, Sándor: Kürschák's Dodecagon, Wolfram Demonstrations Project (March 7, 2011).

<http://demonstrations.wolfram.com/KurschaksDodecagon>