Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2009. november 6.

1. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) normális(ak), melyek pozitív definit(ek)?*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

M_1, M_2, M_3 szimmetrikus, így normális. M_4 nem normális, például mert $M_4 M_4^*$ bal alsó sarkában 25 áll, míg $M_4^* M_4$ megfelelő eleme 29. így a definitség szóba sem jön. Ha M_3-ra Gram-Schmidt–ortogonalizációt alkalmazunk, az egységmátrixot kapjuk, így M_3 pozitív definit. $(1,-1,0)M_1(1,-1,0)^T = 0$ és $(1,0,0)M_2(1,0,0)^T = 0$, így M_1 és M_2 nem pozitív definit.

2. *Határozzuk meg a következő mátrixok szinguláris értékeit:*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} I$ alakú, ahol a két szélső mátrix permutációmátrix, így ortogonális, a középső pedig diagonális pozitív elemekkel. Úgyhogy a diagonális elemek sorrendje erejéig ez B_1 SVD-je, így a szinguláris értékek 5 és 1 (utóbbi kétszeres multiplicitással). $B_2^T B_2 = I$, így a szingulárisa értékek 1, (háromszor). $B_3^T B_3 = B_3^2 = B_3$, így B_3 egy 1 rangú merőleges vetítés, így $B_3^T B_3 = B_3$ sajátértékei 0 (kétszer) és 1 (egyszer), ugyanezek a szinguláris értékek. B_4 blokkdiagonális mátrix, bal felső 2×2-es blokkja egy 1 rangú vetítés, így $B_4^T B_4$ sajátértékei 0, 1 és 9, tehát a szinguláris értékek 0, 1 és 3.

3. *Legyen A egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix. Tegyük fel, hogy A invertálható és A^{-1} is nemnegatív elemű. Igazuljuk, hogy ekkor A minden sorában és oszlopában pontosan egy pozitív elem áll.*

Legyen $A = (a_{ij})$ és $A^{-1} = B = (b_{ij})$. Minden i indexre az AB szorzat i-edik diagonális eleme pozitív, így létezik olyan $j = j_i$, amelyre $a_{ij} > 0$ és $b_{ji} > 0$. Ha $a_{ik} > 0$ valamely, akkor a BA szorzat j-edik sorának és k-adik oszlopának kereszteződésében pozitív elem áll, ezért $BA = I$ miatt $k = j$. Ezzel beláttuk, hogy A minden sorában pontosan egy pozitív elem van. Az oszlopokra vonatkozó állítás hasonló gondolatmenettel igazolható.

4. *Legyen A egy valós elemű négyzetes mátrix, λ pedig egy komplex sajátértéke A-nak. Igazoljuk, hogy ekkor $\overline{\lambda}$ (azaz λ komplex konjugáltja) is sajátértéke A-nak.*

Ha $Av = \lambda v$ valamely komplex $0 \neq v$ vektorra, akkor $A = \overline{A}$ továbbá az összeg, illetve a szorzat konjugáltjára vonatkozó azonosságok miatt

$$A \cdot \overline{v} = \overline{A} \cdot \overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v},$$

ahol vektorok, illetve mátrixok konjugáltja elemenként értendő.

5. *Legyen G egy $n > 1$ pontú egyszerű, hurokél-mentes, összefüggő irányítatlan gráf. Milyen összefüggés állítható G adjacencia-mátrixának primitivitása és G kromatikus száma között? (G adjacencia-mátrixa az az $n \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix, amelyre $a_{ij} = a_{ji} = 1$, ha i és j éllel össze van kötve, különben $a_{ij} = a_{ji} = 0$. G kromatikus száma pedig az a legkisebb k természetes szám, amelyre G csúcsai színezhetők k színnel úgy, hogy ne legyen két éllel összekötött azonos színű pont.)*

A válasz: A akkor és csak akkor primitív, ha G két színnel színezhető. Ugyanis az összefüggőség miatt A irreducibilis. Mivel A^2 főátlójában csupa pozitív elemel állnak, amennyiben A^2 is irreducibilis, akkor A^2 primitív és így A is az. Fordítva, ha A^2 reducibilis, akkor A^{2k} is az minden k-ra, és így A^l nem lehet pozitív semmilyen l-re sem, tehát A imprimitív. Beláttuk, hogy A akkor és csak akkor imprimitív, ha A^2 irreducibilis. Legyen G' az az n pontú gráf, amelyben az $i \neq j$ csúcsot akkor kötjük össze, ha az A^2 mátrix i-edik sorának j-edik eleme pozitív, azaz i-ből megy 2 hosszú út j-be az eredeti G gráfban. Az A^2 mátrix akkor és csak akkor irreducibilis, ha G összefüggő. G' valamely összefüggő komponense az egymásból G-ben páros hosszú sétával elérhető pontokból áll. G őszszefüggősége miatt két eset lehetséges: ha G nem színezhető két színnel, azaz van G-ben pártalan kör, akkor G' is összefüggő (tehát A^2 irreducibilis), ha pedig színezhető, azaz nincs G-ben páratlan kör, akkor páros hosszú séta G-ben csak azonos színű pontok között lehetséges, és így G' nem összefüggő (ekkor A reducibilis).