

Alkalmazott algebra zárthelyi, 2009. október 30.

1. Hány megoldása van a kételemű test felett a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{rcccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \\ & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 0 \end{array}$$

2. Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Mekkora lehet egy duplán sztochasztikus mátrix legnagyobb **szinguláris** értéke?

4. Legyen A egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix, amelyre $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy A csak úgy lehet irreducibilis, ha A minden eleme pozitív.

5. Legyen A egy $m \times n$ -es valós mátrix. Igazoljuk, hogy

$$\max_{v \in \mathbb{R}^n, |v|=1} |Av| = \sigma_1,$$

ahol σ_1 az A mátrix legnagyobb szinguláris értéke!

6. Legyen A egy $m \times n$ -es valós mátrix. Legyen B az az $(m+n) \times (m+n)$ -es mátrix, amelynek bal felső $m \times m$ -es, valamint jobb alsó $n \times n$ blokkja a csupa 0 mátrix, a bal alsó $n \times m$ -es blokkja az A^T , jobb felső $m \times n$ -es blokkja pedig az A mátrix:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array} \right).$$

Milyen összefüggés van A szinguláris értékei és B sajátértékei között?