Alkalmazott algebra zárthelyi, 2010. október 29.

1. Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Mekkora a következő mátrixok legnagyobb szinguláris értéke?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Keressünk olyan $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax = b$ egyenlet a legkisebb (négyzetes) hibával teljesül, azaz az Ax vektor az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos távolságát tekintve a lehető legközelebb esik a b vektorhoz!

5. Tegyük fel, hogy A egy olyan $n \times n$-es valós mátrix, hogy létezik $\lim_{k\to\infty} A^k$ és $\lim_{k\to\infty} A^k = I_n$, az $n \times n$-es egységmátrix Igazoljuk, hogy ekkor $A = I_n$.

6. Legyen A egy nemnegatív valós elemű szimmetrikus mátrix. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor primitív, ha A^2 irreducibilis!