Alkalmazás az $R_3(3)$ Ramsey-szám meghatározására

(Bizonyos) Ramsey-számok:. $R_m(k)$:=az a legkisebb N természetes szám, melyre a K_N teljes gráf éleit m színnel tettszőleges módon színezve mindig keletkezik egy egyszínű teljes k-as részgráf.

Könnyű feladat:. $R_2(3) = 6$.

Szokásos technikával:. $R_3(3) \leq 17$. (Egy pontból kiindul ≥ 6 egyszínű él. Hat ilyen szomszéd között vagy megy ugyanilyen színű él, vagy alkalmazható rájuk az $R_2(3) \leq 6$.

Konstruckció:. ($R_3(3) > 16$) $V = \mathbb{F}_{16}$. Legyen $\psi : \mathbb{F}_{16}^{*} \longrightarrow Z_3$ epimorfizmus ($\sim$ ötödik hatványra emelés). Az (α, β) él ($\alpha \neq \beta \in \mathbb{F}_{16}$) színe: $\psi(\alpha + \beta)$.

Állítás:. Fenti konstruckcióban nincs egyszínű háromszög.
Biz.: Indirekte tegyük fel, hogy $\exists$ páronként különböző $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_{16}$, hogy $\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha + \gamma) = \psi(\beta + \gamma)$. Feltehető, hogy $\gamma = 0$. ($\alpha \leftarrow \alpha - \gamma$, $\beta \leftarrow \beta - \gamma$, $\gamma \leftarrow \gamma - \gamma = 0$ helyettesítés alkalmazható.) Tehát $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = \psi(\alpha + \beta)$. Ezen túl még az is feltehető, hogy $\beta = 1$. ($\alpha \leftarrow \alpha/\beta$, $\beta \leftarrow \beta/\beta = 1$ helyettesítés: $\psi(\alpha/\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta)^{-1} = \psi(\beta)\psi(\beta)^{-1} = 1$, $\psi(\alpha/\beta + 1) = \psi(\alpha + \beta)\psi(\beta)^{-1} = \psi(\beta)\psi(\beta)^{-1} = 1$.) Tehát $\psi(\alpha) = \psi(\alpha + 1) = 1$. Azaz $\alpha^5 = (\alpha + 1)^5 = 1$. Innen $(\alpha + 1)^5 = (\alpha + 1)(\alpha + 1)^4 = (\alpha + 1)(\alpha^4 + 1)\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha + 1$ miatt $\alpha^4 + \alpha = 0$. Mivel $\alpha \neq 0$, azt kapjuk, hogy $\alpha^3 + 1 = 0$, azaz $\alpha^3 = 1$ is igaz. De ez az $\alpha^5 = 1$-gyel együtt csak úgy lehet, ha $\alpha = 1$, ami ellentmond az $\alpha \neq \beta = 1$ feltevésnek.