# Bevezetés az algebrai kombinatorikába

Szerző: Küronya Alex

*Elekes György emlékére*

# Tartalomjegyzék

Ez a jegyzet az szerzőnek[1] 2002 óta a BME TTK Matematikai Intézetében a doktori iskola és a matematikus mesterképzés számára tartott „Bevezetés az algebrai kombinatorikába", „Általános és algebrai kombinatorika" és „Reprezentációelmélet" című előadásai anyagának jelentős részét tartalmazza. Ennek megfelelően mind a tárgyalt eredmények, mind pedig a konkrét részletek a BME TTK matematikus képzéséhez igazodnak.

Az olvasó részéről feltételezünk nagyjából egy félévnyi absztrakt algebrai előismereteket csoportokról és nemkommutatív gyűrűk feletti modulusokról. A szükséges előismeretek száma elég korlátozott, az esetleges hiányosságokat például az [1], [3], [20], [43, 44], könyvekből vagy a [2] elektronikus jegyzetből hamar pótolni lehet. Általában is törekedtünk arra, hogy a referenciák között lehetőség szerint minél több legyen, amely elektronikusan és korlátozás nélkül hozzáférhető. A Schubert-kalkulusról szóló utolsó fejezet anyagigénye sokkal több, erre vonatkozó információkért érdemes a fejezet bevezetését elolvasni.

A szerző az algebrai kombinatorikát, speciálisan a Schubert-kalkulust, Bill Fultontól tanulta, akinek a hatása mind közvetlenül, mind a [12] és a [13] könyvein keresztül nyilvánvaló. Köszönet illeti a BME TTK Matematika Intézetét és Rónyai Lajost (a munkám támogatásért, és amiért lehetővé tették, hogy a fent említett előadások létrejöjjenek), illetve Hegedüs Gábort (a jegyzet egy korábbi változatában való közreműködésért), Sarah Kitchen-t és Wolfgang Soergel-t (a reprezentációelméleti kérdéseim türelmes megválaszolásáért), és Wettl Ferencet (a magyar nyelvű LaTeX és a kulturált szedés világába való bevezetésért).

Legfőképpen pedig szeretném megköszönni a jegyzet lektorának, Horváth Erzsébetnek a rendkívül lelkiismeretes munkáját.

[1] A jegyzet írása során a szerző az alábbi forrásokból kapott támogatást: 61116, 77476, és 77604 számú OTKA pályázatok, a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János Kutatási Ösztöndíja, DFG-Forschergruppe 790 „Classification of Algebraic Surfaces and Compact Complex Manifolds", illetve a BME TTK Matematika Intézetének TÁMOP pályázata.

# 1. fejezet

# A Young-tabló és kombinatorikája

Az első fejezet témája egy kombinatorikus eszköz, az ún. tabló- vagy partíciókalkulus. A tablókalkulus egy önmagában is érdekes matematikai terület, amely elemi eszközökkel is könnyen tanulmányozható, viszont igen nagy jelentőségre tett szert a reprezentációelméletben és az algebrai geometriában betöltött szerepe miatt. Az alkalmazásokról a könyv későbbi fejezeteiben igen sok szó esik, most a Young-tabló elméletének kombinatorikai oldalával fogunk foglalkozni. A téma irány érdeklődő olvasónak ajánljuk többek között a [12], [22], [29], és [40] könyveket, ahol rengeteg további információ található.

## 1.1. Young-tablók és alapvető műveleteik

A tablókalkulus egy $n$ természetes szám különböző jól meghatározott módokon történő részekre bontását, illetve az ezen felbontásokkal végzett érdekes műveleteket vizsgálja. Az alapvető definíció az alábbi.

1.1.1. DEFINÍCIÓ *Az $n$ pozitív egész szám egy $\lambda$* partíció*ja (jelben: $\lambda \vdash n$ vagy $|\lambda| = n$) egy pozitív egészekből álló*

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

*véges számsorozat, ahol*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m ,$$

*és*

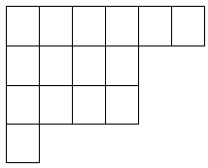
$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n .$$

*Amennyiben ezt egy $n$ üres négyzetből (dobozból) álló rajzzal szemléltetjük, ahol az első sorban $\lambda_1$ doboz van, a másodikban $\lambda_2$, és így tovább, akkor egy $n$ cellát tartalmazó $D$* Young-diagram*ról beszélünk.*

*A teljesség kedvéért az üres sorozatot a $0$ szám partíciójának tekintjük.*

A $D$ Young-diagramot úgy szokás leírni, mint a cellák balra igazított sorokba rendezett halmazát, oly módon, hogy a cellák száma sorról-sorra fogy.

1.1.2. PÉLDA Az alábbi egy 15 dobozt tartalmazó Young-diagram.



1.1.3. MEGJEGYZÉS Számsorozatok növekvő illetve csökkenő voltának leírása során az alábbi konvencióhoz fogjuk tartani magunkat: egy $a_1, \dots, a_m, \dots$ sorozatát *növekvő*nek nevezünk, ha

$$a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq \dots ,$$

és *szigorúan növekvő*nek, ha

$$a_1 < \cdots < a_m < \dots .$$

Ezzel konzisztens módon kezeljük a csökkenő sorozatokat is.

1.1.4. DEFINÍCIÓ *Legyenek $\mu, \lambda$ partíciók. Azt mondjuk, hogy $\mu$* része *$\lambda$-nak (jelben: $\mu \subseteq \lambda$), ha $\mu = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k)$ és $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l)$ esetén minden $1 \leq i \leq k$-ra*

$$\mu_i \leq \lambda_i .$$

A Young-diagramok dobozaiba természetes számokat fogunk írni. A természetes számok tulajdonságaiból keveset fogunk ténylegesen felhasználni, tetszőleges megszámlálható jólrendezett halmaz megfelelne céljainknak, sőt, az esetek döntő többségében egy elég nagy véges halmaz is megteszi.

A számokat úgy helyezzük el a diagramban, hogy minden dobozban pontosan egy legyen, különböző dobozokban lehetnek azonos számok. Egy ilyen elhelyezést a Young-diagram egy *kitöltés*ének hívunk. Amennyiben mégis megköveteljük, hogy különböző dobozokban különböző számok legyenek, a kitöltést *számozás*nak nevezzük.

1.1.5. DEFINÍCIÓ *Legyen $D$ egy Young-diagram. A $D$ diagram egy $T$ kitöltését* Young-tabló*nak vagy röviden* tabló*nak nevezzük, ha minden sor elemei balról jobbra növekvőek és minden oszlop elemei fentről lefelé szigorúan növekvőek. A $D$ diagramnak megfelelő $\lambda$ partíciót a $T$ tabló* alakjának *hívjuk.*

*Egy $n$-dobozú $T$ tablót* standard*nak nevezünk, ha celláit az $1, \dots, n$ elemekkel számozzuk meg, mindegyiket pontosan egyszer felhasználva. Az $\{1, \dots, m\}$ halmazra gyakran a $[m]$ jelölést fogjuk használni.*

*Az $[m]$ elemeivel kitöltött Young-tablók halmazát $\mathcal{T}_m$-mel jelöljük.*

1.1.6. PÉLDA Egy egyszerű példa Young-tablóra az alábbi.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 5 & 6 \\ \cline{1-4} 3 & 5 & 6 \\ \cline{1-3} 7 & 7 & 7 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

A Young-tablók rendkívül fontos szerepet játszanak a szimmetrikus függvények elméletében. A kapcsolat igen egyszerű: a tablók segítségével egy partícióhoz minden $m$ természetes számra hozzá fogunk rendelni egy $m$-változós polinomot, az $s_\lambda(x_1,\dots,x_m)$ ún. *Schur-polinom*ot.

1.1.7. DEFINÍCIÓ *Legyen $\lambda$ az $n$ szám egy partíciója, $D$ a neki megfelelő Young-diagram. A $D$ diagram egy tetszőleges, az $1,\dots,m$ számokkal történő Young-tablószerű $T$ kitöltéséhez hozzárendeljük a*

$$x^T \stackrel{def}{=} \prod_{i=1}^{m} x_i^{\text{az } i \text{ elem előfordulásainak a száma } T\text{-ben}}$$

*monomot. Az $s_\lambda$ Schur-polinom ezek összege, azaz*

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_m) \stackrel{def}{=} \sum_{T \text{ tabló } D\text{-n}} x^T .$$

1.1.8. MEGJEGYZÉS A definícióból egyáltalán nem világos, de később, a szimmetrikus polinomokról szóló fejezetben be fogjuk bizonyítani, hogy a Schur-polinomok szimmetrikusak, azaz a változók tetszőleges permutációja változatlanul hagyja őket.

1.1.9. PÉLDA Tekintsük először a $\lambda = (3)$ partíciót, a neki megfelelő

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \phantom{1} & \phantom{1} & \phantom{1} \\ \hline\end{array}$$

diagrammal. A kétváltozós $s_{(3)}(x_1,x_2)$ Schur-polinomot fogjuk kiszámolni. A lehetséges tablószerű kitöltések:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$$

Ezért a keresett Schur-polinom:

$$s_{(3)}(x_1,x_2) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 .$$

1.1.10. PÉLDA Legyen $\lambda = (1,1,1)$. Először határozzuk meg az $s_\lambda(x_1,x_2,x_3)$ háromváltozós Schur-polinomot. A

$$\begin{array}{|c|}\hline \phantom{1} \\ \hline \phantom{1} \\ \hline \phantom{1} \\ \hline\end{array}$$

diagramot egyféleképpen lehet az $1,2,3$ elemekkel Young-tablóként kitölteni:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} .$$

Ezért a megfelelő Schur-polinom egyetlen monomból áll

$$s_{(1,1,1)}(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \ .$$

Számítsuk most ki az ugyanehhez a partícióhoz tartozó négyváltozós Schur-polinomot. A fenti diagram lehetséges kitöltései az $1,2,3,4$ elemekkel:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array}\ .$$

Így

$$\begin{aligned} s_{(1,1,1)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 \\ &+ x_2x_3x_4 \ . \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $s_{(1,1,1)}(x_1,x_2) = 0$. Általában is igaz, hogy ha $\lambda$ sorainak száma nagyobb, mint $m$, akkor

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = 0 \ .$$

1.1.11. PÉLDA A fenti példák általánosításaként látható, hogy ha $\lambda = (p)$, $p \geq 1$ egész, akkor

$$s_{(p)}(x_1,\ldots,x_m) = h_p(x_1,\ldots,x_m)$$

ahol $h_p$ a $p$-edfokú teljes szimmetrikus polinom. Hasonlóképpen, amennyiben

$$\lambda = (\underbrace{1,\ldots,1}_{p\text{-szer}}) \ ,$$

akkor

$$s_{(1,\ldots,1)} = \begin{cases} e_p(x_1,\ldots,x_m) & \text{ha } p \leq m \\ 0 & \text{ha } p > m, \end{cases}$$

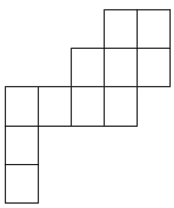
ahol $e_p$ a $p$-edfokú elemi szimmetrikus polinom.

1.1.12. FELADAT *Határozzuk meg az alábbi partíciókhoz tartozó háromváltozós Schur-polinomokat:* $(2,1),(2,1,1)$.

1.1.13. FELADAT *Írjuk fel a* $(2,2)$ *partícióhoz tartozó négyváltozós Schur-polinomot.*

1.1.14. DEFINÍCIÓ *Legyenek* $\mu \subseteq \lambda$ *partíciók. A* $\lambda/\mu$*-alakú* $F$ ferde diagram $\lambda$ *azon kockáiból áll, amelyek nincsenek benne* $\mu$*-ben. Ferde diagramok kitöltését, illetve számozását a tablóknál látott módon definiáljuk, az így kitöltött diagramot* ferde tabló*nak hívjuk.*

1.1.15. PÉLDA Legyen $\lambda = (5,5,4,1,1), \mu = (3,2)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mu \subseteq \lambda$, a $\lambda/\mu$ alakú diagram pedig a következőképpen néz ki:



A diagram egy tablószerű kitöltésére egy példa az alábbi ferde tabló.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \boxed{1} & \boxed{2} \\
 & & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \\
\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{5} & \\
\boxed{2} & & & & \\
\boxed{3} & & & &
\end{array}$$

A tablókon műveleteket fogunk értelmezni. Elsőként a Schenstedtől származó ún. sorbaillesztéssel ismerkedünk meg.

1.1.16. DEFINÍCIÓ *Legyen $T$ $\lambda$ alakú tabló, $x$ természetes szám. Ezekből egy új $T \leftarrow x$ tablót fogunk előállítani, amelyben eggyel több doboz van, mint $T$-ben (speciálisan $T \subseteq T \leftarrow x$), és az új tabló elemei $T$ elemei $x$-szel kiegészítve. Az algoritmus a következő:*

1. *Ha $x$ nagyobb vagy egyenlő, mint az első sor összes eleme, akkor egy új dobozt rakunk az első sor végére, beleírjuk az $x$ elemet és készen vagyunk.*

2. *Ha van $x$-nél nagyobb elem az első sorban, akkor megkeressük ezek között a legbaloldalibbat, kicseréljük $x$-re (ezt a műveletet kiütésnek nevezzük), majd a kieső elemet beillesztjük a tablóba a második sortól kezdve (azaz alkalmazzuk a most ismertetett eljárást a második sorra).*

Természetesen be kell látnunk, hogy az eredményül kapott objektum szintén tabló. Előbb azonban lássunk egy példát.

1.1.17. PÉLDA Legyen $\lambda = (4,4,3,2)$, $x = 2$ és

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline
2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline
4 & 4 & 6 \\ \cline{1-3}
5 & 6 \\ \cline{1-2}
\end{array}$$

A végrehajtandó művelet tehát

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline
2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline
4 & 4 & 6 \\ \cline{1-3}
5 & 6 \\ \cline{1-2}
\end{array} \leftarrow 2$$

Az első sorban van a beillesztendő 2-nél nagyobb elem, ezért az algoritmus szerint közülük a legbaloldalibbat, a 3-ast kicseréljük a 2-esre:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & 2 & \mathbf{2} \\ \hline
2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline
4 & 4 & 6 \\ \cline{1-3}
5 & 6 \\ \cline{1-2}
\end{array}$$

majd a kezünkben maradó 3-ast beillesztjük a második sortól kezdve. Innentől a lépések az alábbi módon alakulnak:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | |
| 2 | 3 | **3** | 5 | $\leftarrow 5$ |
| 4 | 4 | 6 | | |
| 5 | 6 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | |
| 2 | 3 | 3 | 5 | $\leftarrow 6$ |
| 4 | 4 | **5** | | |
| 5 | 6 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 3 | 5 |
| 4 | 4 | 5 | |
| 5 | 6 | **6** | |

Az új doboz az utolsó sor végére került.

1.1.18. ÁLLÍTÁS *Az algoritmus eredményeként kapott $T \leftarrow x$ szintén tabló.*

BIZONYÍTÁS Először is, az algoritmus alapján minden sor növekvő. Másodszor, amikor egy $y$ elem kiüt egy $z$ elemet valamelyik sorból, akkor a $z$ alatt lévő $x$ elemre (amennyiben van ilyen) $x > z$. Ezért $z$ vagy ugyanabba az oszlopba kerül, mint ahol volt, vagy attól balra, így a felette lévő $u$ elemre $u \leq y < z$. Látható, hogy az oszlopok továbbra is szigorúan növekvőek maradnak. Ebből az is következik, hogy a sorok hosszai fogyóak lesznek. □

1.1.19. FELADAT *Adjuk hozzá a* 2 *elemet az alábbi Young-tablóhoz:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | *2* | *2* | *3* | *5* |
| *2* | *3* | *6* | *6* | |
| *4* | *4* | *7* | *7* | |
| *5* | *6* | | | |

1.1.20. FELADAT *Adjuk hozzá a* 3 *elemet az alábbi Young-tablóhoz:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *1* | *1* | *5* |
| *2* | *2* | *6* | *6* | |
| *4* | *5* | *7* | *8* | |
| *5* | *8* | | | |

A sorbaillesztés bizonyos értelemben megfordítható: ha adott az új cella helye, akkor vissza tudjuk állítani az eredeti tablót és meg tudjuk határozni az újonnan beillesztett elemet.

1.1.21. ÁLLÍTÁS *Legyen $T' = T \leftarrow x$, ahol $T, x$ a priori nem ismert, csak $B$, az új doboz. Ekkor $T, x$ egyértelműen meghatározható.*

BIZONYÍTÁS Ha $B$ az első sor végén van, akkor nem történt kiütés, $x$ a $B$-ben lévő elem és $T$ a $T'$-ből a $B$-t tartalmazó doboz eltávolításával nyert tabló.

Amennyiben $B$ nem az első sor végén van, keressük meg a $B$-t tartalmazó sort meg előző sorban a legjobboldali, a $B$-beli elemnél kisebb $z$ elemet. Tegyük $B$ tartalmát $z$ helyére majd ismételjük meg ezt az eljárást mindaddig, amíg az első sorba nem érünk. Az onnan kieső elem lesz $x$ az eredményül kapott tabló pedig $T$. $\square$

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha két sorbaillesztést hajtunk végre egymás után. Későbbiekben hasznos lesz tudnunk az új dobozok egymáshoz viszonyított helyzetét. Ennek leírásához szükségünk lesz az alábbi fogalmakra.

1.1.22. DEFINÍCIÓ *Legyen $T$ tetszőleges tabló, $x$ egy elem, amit beszúrunk $T$-be. Az $x$ elem* kiütési útvonal*a a $T \leftarrow x$ tabló új dobozából áll, illetve a $T \leftarrow x$ tabló azon dobozaiból, amelyekből kiütöttünk elemet. A kiütési útvonalakat tipikusan $R$, $R'$-vel fogjuk jelölni.*

*Legyenek $R$ és $R'$ egy adott $U$ tablóbeli kiütési útvonalak. Azt mondjuk, hogy $R$ (szigorúan) balra van $R'$-től, ha minden olyan sorban, ahol $R'$-nek van doboza, $R$-nek is van és az $R'$ azonos sorbeli dobozával vagy megegyezik, vagy attól balra van. A szigorú esetben nem egyezhetnek meg.*

1.1.23. PÉLDA Az ábrán két lehetséges kiütési útvonalat mutatunk. Az $R_i$ útvonal szigorúan balra van az $R'_i$ kiütési útvonaltól.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $R_1$ | $R'_1$ |
| | | | $R_2$ | | $R'_2$ |
| | | | $R_3$ | | $R'_3$ |
| | | $R_4$ | | | |
| | $R_5$ | | | | |
| $R_6$ | | | | | |

1.1.24. MEGJEGYZÉS Egy kiütési útvonal az első sorban kezdődik és egymás utáni sorokban van egy-egy cellája. Utolsó (legalsó) doboza egy külső sarok, az új doboz.

1.1.25. FELADAT *Legyen $T$ egy $\lambda$-alakú tabló. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt arra, hogy cellák egy részhalmaza kiütési útvonal legyen.*

1.1.26. LEMMA (SORBAILLESZTÉSI LEMMA) *Legyen $T$ tabló, $x, x'$ természetes számok, amelyeket a*

$$(T \leftarrow x) \leftarrow x'$$

*sorrendben illesztünk be $T$-be. Jelöljük a megfelelő kiütési útvonalakat és új dobozokat $R, B$-vel, illetve $R', B'$-vel. Ekkor*

1. *ha $x \leq x'$, akkor $R$ szigorúan balra van $R'$-től, $B$ szigorúan balra és (nem feltétlenül szigorúan) lefelé van $B'$-től;*

2. *ha $x > x'$, akkor $R'$ balra van $R$-től, $B'$ balra és szigorúan lefelé $B$-től.*

BIZONYÍTÁS Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor $x \leq x'$. Ha $x$ nem üt ki egyetlen elemet sem az 1. sorból, akkor $x'$ is az első sor végére kerül, és az állítást beláttuk.

Tegyük tehát fel, hogy $x$ kiütött egy $y$ elemet az első sorból. Ha $x'$ nem üt ki egyetlen elemet sem az első sorból, és simán a sor végére kerül, akkor megint készen vagyunk. Feltehetjük eszerint, hogy $x'$ is kiüt egy $y'$ elemet az első sorból. Mivel $y$ cellájában $x$ áll, az attól balra levő elemek pedig mind kisebbek vagy egyenlők $x$-szel, így $y'$ cellája szükségképpen jobbra van $y$ cellájától, s így $y \leq y'$. Ezután alkalmazzuk az iménti gondolatmenetet a második sorra és az $y \leq y'$ elemekre és így tovább.

Az elmondottakból következik, hogy $R$ nem állhat meg egy vagy több sorral hamarabb, mint $R'$, és mivel egy kiütési útvonal soha nem megy jobbra, $B$ szigorúan balra és gyengén lefelé lesz $B'$-től.

Tekintsük most az $x > x'$ eshetőséget. Mivel a $T \leftarrow x$ tabló első sorának utolsó eleme $> x'$, $x'$ mindenképpen kiüt egy elemet az első sorból. Ha $x$ nem ütött ki senkit az első sorból, akkor készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy $x$ és $x'$ az $y$, illetve $y'$ elemeket ütötték ki az első sorból. A doboz, amit $x'$ üt ki, gyengén balra van az $x$ által kiütött doboztól, mivel a tőle jobbra lévő dobozok tartalma $\geq x > x'$. Emiatt $y > y'$, és analóg módon folytathatjuk a második sorral, és az $y > y'$ elemekkel. Ebből a kiütési útvonalakra és az új dobozokra vonatkozó állítás is rögtön adódik. □

1.1.27. KÖVETKEZMÉNY *Legyen $T$ $\lambda$ alakú tabló,*

$$U = (\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow \cdots \leftarrow x_{p-1}) \leftarrow x_p \ ,$$

*$U$ alakja $\mu$.*

1. *Ha $x_1 \leq \cdots \leq x_p$, akkor $\mu/\lambda$ semelyik két doboza nincs egy oszlopban;*

2. *ha $x_1 > \cdots > x_p$, akkor $\mu/\lambda$ semelyik két doboza nincs egy sorban.*

*Megfordítva, ha $U$ egy $\mu$ alakú tabló, $\mu \supseteq \lambda$, akkor*

1. *ha $\mu/\lambda$ $p$ dobozból áll, mind különböző oszlopban, akkor létezik egyetlen olyan $\lambda$ alakú $T$ tabló és egyetlen $x_1 \leq \cdots \leq x_p$ számsorozat, amelyekre*

$$U = (\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow \cdots \leftarrow x_{p-1}) \leftarrow x_p \ ;$$

2. *ha $\mu/\lambda$ $p$ dobozból áll, mind különböző sorban, akkor létezik egyetlen olyan $\lambda$ alakú $T$ tabló és egyetlen $x_1 > \cdots > x_p$ számsorozat, amelyekre*

$$U = (\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow \cdots \leftarrow x_{p-1}) \leftarrow x_p \ .$$

BIZONYÍTÁS Az első két állítás a sorbaillesztési lemma ismételt alkalmazásából adódik. A megfordításaikat a következőképpen láthatjuk be: ha $\mu/\lambda$ bármely két doboza különböző oszlopban van, vegyük a legjobboldalibb dobozt. Végezzünk el erre a dobozra egy inverz sorbaillesztést, a végén kieső elem legyen $x_p$. Ezután a maradék $p-1$ doboz közül vegyük a legjobboldalibbat, ismételjük meg az imént műveletet és így tovább. A $p$-edik lépés utáni eredmény lesz a $T$ tabló és a sorbaillesztési lemma miatt $x_1 \leq \cdots \leq x_p$. A sorokra vonatkozó állítás teljesen analóg módon igazolható. Az egyértelműség mindkét esetben automatikus. □

A sorbaillesztés ismételt alkalmazásával egy igen érdekes műveletet tudunk definiálni a tablók halmazán.

1.1.28. DEFINÍCIÓ (TABLÓK SZORZATA) *Legyenek $T,U$ tablók, $x_1,\ldots,x_s$ az $U$ tabló elemei soronként balról jobbra felsorolva, az utolsó sorral kezdve, majd lentről felfelé haladva. Ekkor a két tabló szorzata*

$$T \cdot U \stackrel{def}{=} (\ldots(T \leftarrow x_1) \leftarrow \cdots \leftarrow x_{s-1}) \leftarrow x_s\ .$$

A tablók szorzata alapvető fontosságú lesz a következőkben. Amint azt hamarosan látni fogjuk, a tablószorzás *nem kommutatív*.

1.1.29. PÉLDA Legyen

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

$$U = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Most lépésről lépésre összeszorozzuk a két tablót:

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \mathbf{2} \\ \cline{1-1} \end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{1} & 3 \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{3} \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \end{aligned}$$

1.1.30. PÉLDA (A tablószorzás nem kommutatív) Legyen

$$U = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

és

$$T = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}\ .$$

Ekkor

$$U \cdot T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}\ ,$$

azonban

$$T \cdot U = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}\ ,$$

vagyis $U \cdot T \neq T \cdot U$.

1.1.31. FELADAT *Szorozzuk össze az iménti módszerrel az alábbi tablópárokat:*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 5 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

*illetve*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \cline{1-2} 7 & 8 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

1.1.32. TÉTEL *A fenti szorzással a tablók halmaza egy monoid lesz az üres (nulla dobozú) tablóval mint egységelemmel.*

BIZONYÍTÁS Láttuk, hogy a tablók halmaza zárt a szorzásra nézve, az is könnyen igazolható, hogy az üres tabló a szorzásra nézve jobbegységként viselkedik (ha nem szúrunk be semmit egy tablóba, akkor az változatlan marad. A szorzás definíciójából következik, hogy ha a fenti sorrendben beszúrjuk egy $T$ tabló elemeit az üres tablóba, akkor visszakapjuk a $T$ tablót, s így az üres tabló jobbegység is lesz.

Az egyetlen nehéz kérdés a szorzás asszociativitása. Ennek bizonyításához további eszközökre lesz szükségünk, ezért későbbre halasztjuk. □

Most megismerkedünk egy ferde tablókon értelmezett művelettel, a Schützenbergertől származó ún. csúsztatással. Ezt is fel lehet használni tablók szorzatának definiálására.

Legyenek $\lambda \supseteq \mu$ partíciók, $\mu$ nem üres. Egy $\lambda/\mu$ alakú $S$ ferde tablónak van egy vagy több *belső sarka*, azaz olyan doboza, amely $\mu$-ben van, de az alatta és tőle jobbra lévő kockák már nincsenek $\mu$-ben. Vegyük észre, hogy az $S$ ferde tabló egy belső sarka nincs benne $S$-ben.

1.1.33. DEFINÍCIÓ (CSÚSZTATÁS) *Legyen $S$ mint fent egy ferde tabló, $B$ a $\lambda/\mu$ ferde tabló egy* belső sarka*, azaz olyan doboza $\mu$-nek, hogy az alatta és tőle jobbra lévő kockák nincsenek $\mu$-ben. Tekintsük $B$ jobb oldali, illetve alsó szomszédját. Tegyük át $B$-be a két elem közül a kisebbet, egyenlőség esetén az alsót. Az újonnan üresen maradt mezőre ismételjük meg a fenti eljárást egészen addig, amíg egy külső sarokhoz nem érünk. Ekkor az üres dobozt eltávolítjuk.*

1.1.34. PÉLDA Tekintsük a

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \phantom{0} & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

ferde tablót és annak egyetlen belső sarkát (a külső $\lambda$ diagram bal felső sarkát). Ezt fogjuk csúsztatással eltávolítani.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & \\ 5 & 5 & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ & 3 & 6 & \\ 5 & 5 & & \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & & 6 & \\ 5 & 5 & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & \\ 5 & & & \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & \\ 5 & & & \end{array}$$

1.1.35. ÁLLÍTÁS *Egy csúsztatás eredménye szintén ferde tabló.*

BIZONYÍTÁS Mivel az $S$ ferde tablóból egy külső sarkot távolítottunk el és egy belső sarkot adtunk hozzá, a kapott objektum alakja továbbra is ferde diagram. Azt, hogy a kitöltés tablószerű marad, lépésenként fogjuk ellenőrizni. Tekintsünk egy elemi csúsztatási lépést, ahol az $S$ tablónak az üres mezőt körülvevő része az alábbi:

$$\begin{array}{ccc} & b & v \\ a & & y \\ u & x & \end{array}$$

Két eset van, aszerint, hogy lefelé, vagy jobbra csúsztatjuk el az üres mezőt. Ha $x \le y$, azaz az üres mező lefelé mozog, akkor az eredmény

$$\begin{array}{ccc} & b & v \\ a & x & y \\ u & & \end{array}$$

Ellenőrizendő, hogy $a \le x \le y$. Az utolsó ferde táblórészlet tablótulajdonsága miatt $a < u \le x$, így $a \le x$ és $x \le y$.

Amennyiben $x > y$, akkor az üres kockát jobbra csúsztatjuk.

$$\begin{array}{ccc} & b & v \\ a & y & \\ u & x & \end{array}$$

A tablótulajdonság meglétéhez annyit kell belátnunk, hogy $b < y < x$. Ebből $y < x$ már adott, az idézett táblórészlet tabló voltából pedig $b \le v < y$ következik. □

1.1.36. MEGJEGYZÉS A Schützenberger-féle csúsztatás is megfordítható, azaz ha ismerjük az eltávolított cella helyét, vissza tudjuk állítani a kiindulási állapotot és a kezdetben választott belső sarkot.

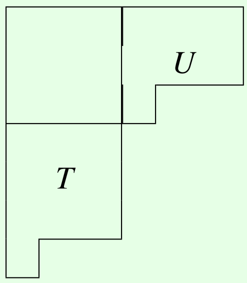
A csúsztatást megismételve újabb és újabb belső sarkokra, végeredményül egy tablót kapunk. Ezt röviden úgy láthatjuk be, hogy észrevesszük, hogy a belső tabló celláinak a száma minden egyes lépésben eggyel csökken. Ezért véges sok lépés után a belső sarkok elfogynak. Egy olyan ferde tabló, amelynek nincsen belső sarka, sima tabló. Az iménti módszert az $S$ ferde tabló *kiegyenesítésének* nevezzük, jelölése $\mathrm{Rect}(S)$. Ez elvben természetesen függ a belső sarkok választásától, azonban be fogjuk látni, hogy ez nem így van.

1.1.37. TÉTEL *Egy adott $S$ ferde tablóból kiindulva bármely belső sarok választásokkal ugyanazt a tablót kapjuk, azaz $\mathrm{Rect}(S)$ egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS Ld. [12, Chapter 2]. □

A csúsztató eljárást egy újabb szorzatkonstrukcióra fogjuk felhasználni.

1.1.38. DEFINÍCIÓ *Legyenek $T,U$ tetszőleges Young-tablók, $S$ az alábbi ferde tabló.*




*Ekkor*

$$T \star U \stackrel{def}{=} \mathrm{Rect}(S) \ .$$

1.1.39. TÉTEL *A két szorzat megegyezik.*

BIZONYÍTÁS Ld. [12, Chapter 2]. □

Az utolsó két tétel már kiadja a sorbaillesztéssel definiált $T \cdot U$ tablószorzás asszociativitását, hiszen a $T \star U$ szorzat az 1.1.37. Tétel miatt láthatóan asszociatív.

## 1.2. A tablógyűrű

A tablók szorzásához vezető kombinatorikai gondolatmeneteket közvetlenül felhasználhatjuk szimmetrikus polinomokra vonatkozó ismeretek szerzésére. Ezt jól áttekinthető formában az ún. tablógyűrű — egy, a tablók segítségével definiált nemkommutatív gyűrű — segítségével tehetjük meg.

1.2.1. DEFINÍCIÓ *Legyen $R_{[m]}$ a $\mathcal{T}_m$ (vagyis az $[m]$-beli elemekkel rendelkező tablók) által generált félcsoportgyűrű, azaz egy szabad $\mathbb{Z}$-modulus a tablókkal mint bázissal, amelyben a báziselemek közti tablószorzást lineárisan kiterjesztjük az egész modulusra. Ha szükség lenne arra, hogy egy $T$ tablót a neki megfelelő tablógyűrűbeli elemtől megkülönböztessük, ez utóbbit $[T]$-vel fogjuk jelölni.*

1.2.2. MEGJEGYZÉS A definícióban leírt szorzás jóldefiniált, ti. ha

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_m} a_T [T] \ , \ \sum_{U \in \mathcal{T}_m} b_U [U]$$

két tablógyűrűbeli elem, akkor

$$\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_m} a_T[T]\right)\cdot\left(\sum_{U\in_m} b_U[U]\right) = \sum_{V\in\mathcal{T}_m}\left(\sum_{T\cdot U=V} a_T b_U\right)V\ ,$$

továbbá, a fenti műveletekkel $R_{[m]}$ egy nemkommutatív gyűrű. A tény, hogy $R_{[m]}$-ben a szorzás nem kommutatív, annak megfogalmazása, hogy a tablókra vonatkozó szorzás nem kommutatív, azaz két $T,U$ tabló esetén általában $T\cdot U \neq U\cdot T$.

1.2.3. FELADAT *Ellenőrizzük a szükséges műveleti azonosságokat $R_{[m]}$-ben. Írjuk le az $R_{[1]}$ gyűrűt.*

1.2.4. MEGJEGYZÉS Tetszőleges $S$ egységelemes[1] félcsoport esetén definiálni tudjuk a hozzá tartozó $\mathbb{Z}S$ ún. félcsoportgyűrűt az alábbi univerzális tulajdonság segítségével: egy $(\mathbb{Z}S,\iota)$ párt (ahol $\mathbb{Z}S$ egy gyűrű, $\iota : S \hookrightarrow \mathbb{Z}S$ pedig egy félcsoporthomomorfizmus $\mathbb{Z}S$ multiplikatív csoportjába) az $S$-hez tartozó félcsoportgyűrűnek hívunk, ha minden $R$ gyűrű és $\phi : S \to R$ félcsoporthomomorfizmus esetén ami $R$ multiplikatív csoportjába vezet, egyértelműen létezik egy

$$\psi : \mathbb{Z}S \longrightarrow R$$

gyűrűhomomorfizmus, amelyre $\psi\circ\iota = \phi$. Rajzban ezt az alábbi diagram kommutativitása fejezi ki.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathbb{Z}S \arrow[dl, "\exists!\psi"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Az univerzális tulajdonságból következik, hogy ha $(\mathbb{Z}S,\iota)$ létezik, akkor az kanonikus izomorfizmus erejéig egyértelmű.

A létezés pontosan úgy mutatható meg, mint a tablógyűrű definíciójában; mint additív csoport legyen

$$\mathbb{Z}S \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z}[s]$$

az $S$ halmazon értelmezett szabad abel csoport, a multiplikatív struktúrát pedig a

$$[s]\cdot[s'] \stackrel{\text{def}}{=} [ss']$$

reláció $\mathbb{Z}S$-re történő lineáris kiterjesztésével kapjuk (ahol $ss'$ az $S$-beli szorzatot jelöli).

A definíció minimális változtatásával bármilyen gyűrű feletti algebrát is készíthetünk $S$-ből. Erre egy klasszikus példa egy $G$ csoporthoz rendelt $\mathbb{C}G$ csoportalgebra, ami a reprezentációelméleti fejezetben is komoly szerepet játszik majd.

[1] Az $S$-beli egységelemre azért van szükségünk, hogy a kapott gyűrű is egységelemes legyen; konvenciónk szerint minden gyűrű egységelemes.

Az $R_{[m]}$ tablógyűrűből van egy rendkívül fontos gyűrűhomomorfizmus az egészek feletti $m$-változós polinomok gyűrűjébe.

$$\begin{array}{ccc} R_{[m]} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_m] \\ T & \mapsto & x^T \ , \end{array}$$

ahol — amint azt korábban már láttuk —

$$\begin{array}{rcl} x^T & \stackrel{\text{def}}{=} & \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i} \\ a_i & = & i \text{ előfordulásainak száma } T\text{-ben.} \end{array}$$

A tablógyűrűben most egy sereg fontos elemet definiálunk. Ha $\lambda$ az $n$ szám egy partíciója, akkor legyen

$$S_\lambda[m] \stackrel{\text{def}}{=} \text{az összes } \lambda\text{-alakú tabló összege } R_{[m]}\text{-ben.}$$

Ha $m$ rögzített, vagy a szövegkörnyezetből egyértelmű, akkor gyakran csak $S_\lambda$-t írunk.

1.2.5. PÉLDA Az $S_\lambda[m]$ elemekre egy egyszerű példa az alábbi: legyen $\lambda = (2), m = 2$, ekkor

$$S_{(2)}[2] = \boxed{1 \mid 1} + \boxed{1 \mid 2} + \boxed{2 \mid 2} \ .$$

Az alábbi megfigyelés egyszerű, viszont nagy jelentősége van, mivel összeköti a tablókalkulust a szimmetrikus polinomok elméletével.

1.2.6. ÁLLÍTÁS *Az eddigi jelölések megtartásával*

$$\Phi(S_\lambda[m]) = s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) \ ,$$

*ahol $s_\lambda$ az $m$-változós Schur-polinom.*

BIZONYÍTÁS Az állítás a Schur-polinomok, illetve az $S_\lambda[m]$ tablógyűrűbeli elemek definícióinak közvetlen következménye. □

1.2.7. ÁLLÍTÁS (PIERI-FORMULÁK) *Legyen $m \geq 1$ rögzített, $p \geq 1$. Ekkor*

$$S_\lambda \cdot S_{(p)} = \sum_\mu S_\mu \ ,$$

*ahol $\mu$ azokon a tablókon fut végig, amelyeket úgy kapunk, hogy egy $\lambda$-alakú tablóhoz hozzáadunk $p$ dobozt, mind különböző oszlopban.*

$$S_\lambda \cdot S_{(1^p)} = \sum_{\mu'} S_{\mu'} \ ,$$

*ahol $\mu'$ végigfut mindazon tablókon, amelyek $\lambda$-ból $p$ doboz hozzáadásával keletkeztek, mind különböző sorban.*

BIZONYÍTÁS Csak az első egyenlőséget fogjuk belátni, a második igazolása teljesen analóg módon történik. Az

$$S_\lambda \cdot S_{(p)} = \sum_\mu S_\mu ,$$

formula mindkét oldalán olyan tablók összege szerepel, amelyeknek $|\lambda| + p$ doboza van. Azt kell belátni, hogy mindkét oldalon ugyanazok a tablók szerepelnek és ugyanannyiszor fordulnak elő (azaz mindegyik egyszer).

Vegyünk először egy tablót a baloldalról. Ez $T \cdot U$ alakú, ahol $U$ egy egysoros tabló. A sorbaillesztési lemma miatt az új kockák mind különböző oszlopba kerülnek, tehát a $T \cdot U$ tabló szerepel a jobboldali összegben is.

Tekintsünk egy $V$ tablót a jobboldalról. Belátjuk, hogy pontosan egyféleképpen áll elő $V = T \cdot U$ alakban ($T, U$ mint fent). Először is, ha $V$ alakja $\mu$, akkor $\mu/\lambda$ egyértelműen megadja a $p$ darab új doboz helyét. Ebből viszont a sorbaillesztési lemma megfordítása miatt $T$ és $U$ egyértelműen visszaállítható. □

A partíciókalkulussal való foglalkozás első gyümölcseként a szimmetrikus polinomokra vonatkozó nemtriviális összefüggéseket kapunk.

1.2.8. KÖVETKEZMÉNY (PIERI-FORMULÁK SZIMMETRIKUS POLINOMOKRA) *Legyenek $m,p,n$ pozitív egészek, $\lambda$ az $n$ szám egy partíciója. Ekkor*

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_m)h_p(x_1,\dots,x_m) = \sum_\mu s_\mu(x_1,\dots,x_m) ,$$

*ahol $\mu$ azokon a tablókon fut végig, amelyeket úgy kapunk, hogy egy $\lambda$-alakú tablóhoz hozzáadunk $p$ dobozt, mind különböző oszlopba; továbbá $h_p$ a $p$-edfokú teljes szimmetrikus polinom (ld. 1.1.11. Példa).*

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_m)e_p(x_1.\dots,x_m) = \sum_{\mu'} s_{\mu'}(x_1,\dots,x_m) ,$$

*ahol $\mu'$ végigfut mindazon tablókon, amelyek $\lambda$-ból $p$ doboz hozzáadásával keletkeztek és amelyek mind különböző sorban vannak; itt $e_p$ a $p$-edfokú elemi szimmetrikus polinom (ld. 1.1.11. Példa).*

BIZONYÍTÁS Alkalmazzuk a $\Phi$ leképezést a tablógyűrűbeli Pieri-formulákra és vegyük észre, hogy

$$s_{(p)}(x_1,\dots,x_m) = h_p(x_1,\dots,x_m)$$

valamint

$$s_{(1^p)}(x_1,\dots,x_m) = e_p(x_1,\dots,x_m) .$$ □

1.2.9. FELADAT *Írjuk fel az alábbi szorzatokat Schur-polinomok lineáris kombinációiként.*

1. $s_{(2,1)}(x_1,x_2,x_3) \cdot h_2(x_1,x_2,x_3)$

2. $s_{(2,1)}(x_1,x_2,x_3)\cdot e_2(x_1,x_2,x_3)$

3. $s_{(2,2)}(x_1,x_2,x_3)\cdot h_3(x_1,x_2,x_3)$

1.2.10. DEFINÍCIÓ *Egy $T$ tabló* tartalma *egy természetes számokból álló $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_l)$ sorozat, amelyre teljesül, hogy $T$ elemei között pontosan $\mu_1$ darab 1-es, $\mu_2$ darab 2-es, … és $\mu_l$ darab $l$-es van. Tetszőleges $\lambda$ partícióra és $\mu$ sorozatra*

$$K_{\lambda\mu} \stackrel{def}{=} \text{a } \lambda\text{-alakú és } \mu \text{ tartalmú tablók száma}\ .$$

*Amennyiben $\mu$ is partíció, a $K_{\lambda\mu}$ számot a $(\lambda,\mu)$ párhoz tartozó* Kostka-szám*nak hívjuk.*

1.2.11. PÉLDA Legyen

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \cline{1-3} 5 & 5 & & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Ekkor $T$ tartalma $(2,2,2,1,2)$.

1.2.12. ÁLLÍTÁS *$K_{\lambda\mu}$ megegyezik azon $\lambda^{(1)}\subseteq\lambda^{(2)}\subseteq\cdots\subseteq\lambda^{(l)}=\lambda$ partíciósorozatok számával, amelyekre a*

$$\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$$

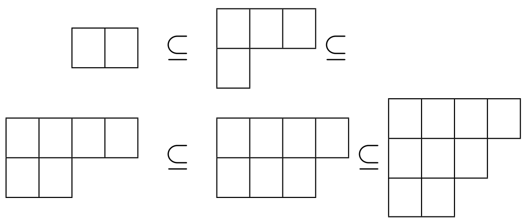
*ferde diagramoknak $\mu_i$ dobozuk van, mind különböző oszlopban.*

BIZONYÍTÁS Legyen $T$ $\lambda$-alakú $\mu$-tartalmú tabló. $T$-hez hozzárendeljük az alábbi partíciósorozatot: $\lambda_1$ legyen azon kockák halmaza, amelyekben $T$-ben 1-esek állnak, $\lambda_2$ legyen azon kockák halmaza, amelyeknek megfelelő dobozokban $T$-ben 1 vagy 2 áll és így tovább. Az iménti hozzárendelés egy bijektív megfeleltetést létesít a fent szereplő halmazok között. □

1.2.13. PÉLDA Tekintsük az iménti

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \cline{1-3} 5 & 5 & & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

tablót. A neki megfelelő partíciósorozat



1.2.14. LEMMA *Az eddigi jelölésekkel*

$$h_{\mu_1}h_{\mu_2}\dots h_{\mu_l} = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu}s_\lambda$$

*ahol $\lambda$ végigfut az összes partíción, és $h_{mu_i} = s_{\mu_i}$ a $\mu_i$-fokú m-változós teljes szimmetrikus polinom.*

BIZONYÍTÁS Az 1.1.11. Példa és a Pieri-formulák (1.2.7. Állítás) szerint elég azt belátni, hogy

$$S_{(\mu_1)} \cdot S_{(\mu_2)} \cdot \ldots \cdot S_{(\mu_l)} = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} S_\lambda \; .$$

ahol $\lambda$ ismét végigfut az összes partíción. Az imént láttuk (1.2.12. Állítás), hogy $K_{\lambda\mu}$ azon

$$\lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \lambda^{(l)} = \lambda$$

partíciósorozatok száma, amelyekre a $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ ferde tablóknak $\mu_i$ dobozuk van mind különböző oszlopban. A Pieri-formulákat és a Sorbaillesztési Lemma következményét használva azt kapjuk, hogy $T$ $K_{\lambda\mu}$-féleképpen írható

$$T = U_1 \cdot \ldots \cdot U_l$$

alakba, ahol $U_i$ egy $(\mu_i)$-alakú tabló. □

1.2.15. PÉLDA Legyen $\mu = (2,1)$, $m = 3$. A fentiek szerint ekkor az $R_{[3]}$ gyűrűben

$$S_{(2)} \cdot S_{(1)} = \sum_\lambda K_{\lambda,(2,1)} S_\lambda \; ,$$

ahol

$$S_{(2)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} + \cdots + \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline\end{array}$$

és

$$S_{(1)} = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array} \; .$$

Másrészt $K_{\lambda,(2,1)}$ azon $\lambda$ alakú tablók száma, amelyekben két darab 1-es van és 1 darab 2-es. Ilyen tabló összesen kettő van:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Eszerint

$$K_{\lambda,(2,1)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = (3) \text{ vagy } \lambda = (2,1), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így — amint azt közvetlen beszorzással is láthatjuk —

$$S_{(2)} \cdot S_{(1)} = S_{(3)} + S_{(2,1)} \; ,$$

illetve a szimmetrikus polinomok nyelvére lefordítva

$$h_2(x_1,x_2,x_3) \cdot h_1(x_1,x_2,x_3) = h_3(x_1,x_2,x_3) + s_{(2,1)}(x_1,x_2,x_3) \; .$$

A partíciókon többfajta részbenrendezés is ismert, mi az alábbiakkal fogunk foglalkozni.

1.2.16. DEFINÍCIÓ *Legyenek $\lambda,\mu$ partíciók. Ekkor*

1. *(lexikografikus rendezés) $\mu \leq \lambda$, ha az első olyan $i$ indexre amelyre $\mu_i \neq \lambda_i$, $\mu_i < \lambda_i$.*
2. *(dominancia) $\mu \lhd \lambda$, ha minden $i \geq 1$ esetén*
$$\mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \ .$$
3. *(tartalmazás) $\mu \subseteq \lambda$, ha minden $i \geq 1$ esetén $\mu_i \leq \lambda_i$.*

1.2.17. FELADAT *Ellenőrizzük, hogy a partíciókon definiált mindhárom reláció valóban részbenrendezés.*

A három részbenrendezés közül csak a lexikografikus rendezés teljes rendezés.

1.2.18. PÉLDA (A DOMINANCIA ÉS A TARTALMAZÁS NEM RENDEZÉS) Legyen $\mu = (2,2,2)$ és $\lambda = (3,1,1)$. Ekkor
$$\mu_1 < \lambda_1$$
és
$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 > \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_3 \ ,$$
tehát $\lambda \not\lhd \mu$ és $\mu \not\lhd \lambda$.

Az is látható, hogy $\mu \not\subseteq \lambda$ és $\lambda \not\subseteq \mu$.

1.2.19. MEGJEGYZÉS A három részbenrendezés nem teljesen független egymástól. Ha
$$\mu \subseteq \lambda \ ,$$
akkor
$$\mu \lhd \lambda \text{ és } \mu \leq \lambda \ ,$$
fordítva azonban általában egyik állítás sem igaz. A dominancia maga után vonja a lexikografikus relációt, fordítva viszont általában nincs így.

1.2.20. FELADAT *Igazoljuk az előző megjegyzés állításait.*

Ami számunkra fontos a Kostka-számok és a részbenrendezések viszonyából, azok a következők.

1.2.21. ÁLLÍTÁS (LEXIKOGRAFIKUS RENDEZÉS ÉS KOSTKA-SZÁMOK) *Legyenek $\lambda,\mu$ az $n$ szám partíciói. Ha $\mu > \lambda$ a lexikografikus rendezésre nézve, akkor $K_{\lambda\mu} = 0$; továbbá $K_{\lambda\lambda} = 1$.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel, hogy $\mu \not\leq \lambda$, és legyen $i$ az a legkisebb index, amelyre teljesül, hogy $\mu_j = \lambda_j$ ha $1 \leq j < i$, és $\mu_i > \lambda_i$. Vegyük számba, hogyan nézhet ki egy $\lambda$ alakú és $\mu$ tartalmú tabló. A döntő megfigyelés az alábbi: egy Young-tablóban 1-es csak az első sorban, 2-es csak az első két sorban szerepelhet, és így tovább.

Mivel $\mu_j = \lambda_j$ minden $1 \leq j < i$ esetén, az első $i-1$ sor mindegyikében pontosan annyi kocka van, ahány az adott számból; emiatt az első sor csupa 1-esből, a második csupa 2-esből áll, és így tovább. Ily módon a $\mu_i$ darab $i$ elem csakis az $i$-edik sorban szerepelhet, ott azonban csak $\lambda_i < \mu_i$ doboz van, amikben nem férnek el. Azt kaptuk tehát, hogy a $\mu > \lambda$ esetben nem létezik $\lambda$ alakú és $\mu$ tartalmú tabló, vagyis $K_{\lambda\mu} = 0$, ahogy állítottuk.

Az iménti érvelés azt is adja, hogy $K_{\lambda\lambda} = 1$: minden $1 \leq i \leq m$ esetén az $i$ elemek csak az $i$-edik sorba kerülhetnek, ott viszont pontosan annyi, $\lambda_i$, hely van, mint amennyi $i$ számot szeretnénk elhelyezni. □

1.2.22. ÁLLÍTÁS (DOMINANCIA ÉS KOSTKA-SZÁMOK) *$K_{\lambda\mu} \neq 0$ pontosan akkor, ha $\mu \lhd \lambda$; ebben az esetben $K_{\lambda\mu} = 1$.*

BIZONYÍTÁS Ismét az az észrevétel a kiindulópontunk, hogy egy $k$ pozitív egész szám egy $T$ Young-tablónak csak az első $k$ sorában fordulhat elő. Tegyük fel, hogy $\mu \not\lhd \lambda$, és legyen $i$ egy olyan index, amelyre

$$\mu_1 + \cdots + \mu_i > \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \ .$$

Ekkor az $1, \ldots, i$ számokból, amelyek csak az első $i$ sorba kerülhetnek, összesen több van, mint amennyi doboz az első $i$ sorban van. Így a $\lambda$ partíciónak nem létezik tablószerű kitöltése a $\mu$ tartalommal, vagyis $K_{\lambda\mu} = 0$.

Ha $\mu \lhd \lambda$, akkor sorfolytonosan kitöltjük a $\lambda$ alakú Young-diagramot a $\mu_1$ darab 1-essel, $\mu_2$ darab 2-essel és így tovább. Mivel

$$\mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$$

minden $i$-re, az eredmény egy tabló, így $K_{\lambda\mu} = 1$. □

## 1.3. Tablók szavai

Ebben a fejezetben a tablók egy fontos invariánsát, az ún. szavukat definiáljuk, majd megvizsgáljuk, hogyan viselkedik ez az invariáns a tablókon értelmezett szorzásokra nézve.

1.3.1. DEFINÍCIÓ *Egy $T$ (ferde) tabló $w(T)$ szavát úgy kapjuk, hogy felsoroljuk a tabló elemeit, kezdve az utolsó sorral, balról jobbra, majd az utolsó előtti sor jön (szintén balról jobbra) és így tovább.*

1.3.2. PÉLDA Tekintsük a

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 & \\ \cline{1-3} 7 & 7 & & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

tablót. Ekkor $w(T) = 77|246|1355$ (a függőleges vonalak mindössze a sorok elválasztására szolgálnak).

1.3.3. PÉLDA (FERDE TABLÓ SZAVA) Legyen most

$$S = \begin{array}{ccccc} & & & \boxed{1} & \boxed{2} \\ & & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{5} & \\ \boxed{2} & & & & \\ \boxed{3} & & & & \end{array} .$$

Az $S$ tabló szava

$$w(S) = 3|2|5421|543|21 \; .$$

1.3.4. MEGJEGYZÉS Egy tablót egyértelműen vissza tudunk állítani a szavából. Ti. felosztjuk növekvő részekre, az első darab lesz az utolsó sor, a második az utolsó előtti, és így tovább.

Ugyanakkor fontos észrevenni, hogy nem minden szó származik tablóból. Például a $w = 77712$ szó nem lehet semmilyen tablónak a szava, mivel a most ismertetett visszaállítási eljárás nem tablót ad.

1.3.5. MEGJEGYZÉS A Young-tablók esetével ellentétben minden szó előáll mint egy ferde tabló szava. Egy módszer ennek megmutatására: vágjuk a szót növekvő darabokra, majd rendezzük el őket egy ferde tablóban úgy, hogy minden darab a megelőzőekhez képest jobbra fel legyen (az előző darab utolsó kockájától a jelenlegi darab első kockája legyen jobbra fel).

A ferde tablók használatával viszont elvesztjük a tabló egyértelmű visszaállíthatóságát, ti. sok ferde tabló adja ugyanazt a szót.

1.3.6. FELADAT *Adjunk meg két különböző ferde tablót, amelyeknek a szava* 77712.

Elsőként megvizsgáljuk a sorbaillesztés és a tablók szavainak viszonyát. Ez egy alapvető fontosságú kérdés, aminek igen sok alkalmazása van. Legyen

$$w = \alpha \cdot x' \cdot \beta \; ,$$

ahol $\alpha \leq x' \leq \beta$, és kövessük nyomon az $\alpha \leq x < x' \leq \beta$ elem beillesztését. Ezt a folyamatot lebonthatjuk kisebb egységekre, az egyes sorokba való kiütés/beillesztés párokra. Vizsgáljunk meg egy ilyet.

$$\begin{aligned}
\alpha x' b_1 \dots b_{q-1} b_q x &\mapsto \alpha x' b_1 \dots b_{q-1} x b_q && \text{ha } x < b_{q-1} \leq b_q \\
&\vdots \\
&\mapsto \alpha x' b_1 x b_2 \dots b_q && \text{ha } x < b_1 \leq b_2 \\
&\mapsto \alpha x' x b_1 \dots b_q && \text{ha } x < x' \leq b_1
\end{aligned}$$

Az alábbi szabályt figyelhettük meg: ha $x < y \leq z$ akkor

$$yzx \mapsto yxz \; . \qquad \text{(K1)}$$

Folytatva a műveletet tovább, $x$ kiüti $x'$-t és $x'$ elindul balra.

$$\begin{aligned}
a_1 \dots a_{p-1} a_p x' x \beta &\mapsto a_1 \dots a_{p-1} x' a_p x \beta && \text{ha } a_p \leq x < x' \\
&\vdots \\
&\mapsto a_1 x' a_2 \dots a_p x \beta && \text{ha } a_2 \leq a_3 < x' \\
&\mapsto x' a_1 \dots a_p x \beta && \text{ha } a_1 \leq a_2 < x'
\end{aligned}$$

A fenti átalakítások mind az alábbi szabály követik: ha $x \le y < z$ akkor

$$xzy \mapsto zxy\,. \qquad \text{(K2)}$$

A (K1), (K2) transzformációs szabályokat és inverzeiket együttesen *elemi Knuth-transzformációk*nak nevezzük. Jól megjegyezhetők az alábbi módon:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline y & z \\ \hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline\end{array} \;=\; \begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline y \\ \cline{1-1}\end{array} \quad yzx \mapsto yxz \;\; (x < y \le z)$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|}\hline y \\ \hline\end{array} \;=\; \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z \\ \cline{1-1}\end{array} \quad xzy \mapsto zxy \;\; (x \le y < z)\,.$$

1.3.7. DEFINÍCIÓ *A $w_1, w_2$ szavakat* Knuth-ekvivalensek*nek mondjuk, jelben $w_1 \equiv w_2$, ha egyik a másikból elemi Knuth-transzformációk egy véges sorozatával megkapható.*

Az eddigi vizsgálódásainkat összefoglalva az alábbi eredményt kapjuk.

1.3.8. TÉTEL *Legyenek $T,U$ Young-tablók, $x$ egy pozitív egész szám. Ekkor*

$$w(T \leftarrow x) \equiv w(T)\cdot x\,,$$

*illetve*

$$w(T\cdot U) \equiv w(T)\cdot w(U)\,.$$

Jóval több munkával az alábbi is belátható.

1.3.9. TÉTEL *A Schützenberger-féle csúsztatás megőrzi a Knuth-ekvivalenciát.*

Ezt a tételt nem igazoljuk, az érdeklődő olvasó egy részletes bizonyítást talál a [12] mű második fejezetében.

A következő eredmény alapvető jelentőségű a Young-tablók elméletében.

1.3.10. TÉTEL *Minden szó pontosan egy tabló szavával Knuth-ekvivalens.*

A bizonyítás nehezebbik részéhez, az egyértelműséghez, további eszközökre lesz szükségünk. Most ezért csak azt bizonyítjuk be, hogy minden $w$ szóhoz létezik olyan $T$ tabló, amelyre $w \equiv w(T)$.

BIZONYÍTÁS Az alábbi a $w$ szóhoz rendelt ún. kanonikus tabló konstrukciója. Ha $w = x_1 \dots x_r$ akkor legyen

$$T = \Big(\dots\Big(\boxed{x_1} \leftarrow x_2\Big)\dots\Big) \leftarrow x_r\,.$$

Az előző állítás miatt — azaz lényegében mivel a sorbaillesztés kompatibilis a Knuth-ekvivalenciával — $w(T) \equiv w$, ahogy azt szerettük volna. □

## 1.4. Növekvő részsorozatok

Egy önmagában is érdekes algoritmikus kérdés egész számok egy véges sorozatában minél hosszabb monoton részsorozatot (vagy akár nagy összhosszúságú diszjunkt monoton részsorozatokat) keresni. Érdekes módon ennek a feladatnak sok köze van a tablók szavai és a Knuth-ekvivalencia témakörében végzett vizsgálatainkhoz.

1.4.1. DEFINÍCIÓ *Ha $w = x_1 \ldots x_r$ egy $[m]$-beli szó, akkor jelölje $L(w,1)$ a $w$ szó leghosszabb növekvő részsorozatának hosszát. Általános legyen $L(w,k)$ az a legnagyobb természetes szám, amely előállítható $k$ darab diszjunkt $w$-beli növekvő részsorozat hosszának összegeként.*

1.4.2. PÉLDA Tekintsük a $w = 154234123331$ szót. Némi gondolkodás után látszik, hogy $L(w,1) = 6$, mivel a **1**54**2**34**1**1**2333**1 egy hatelemű növekvő részsorozat és hosszabb növekvő részsorozat viszont nincs $w$-ben.

Valamelyest munkaigényes, de még mindig belátható elemi úton, hogy $L(w,2) = 9$ és $L(w,3) = 12$. Az $L(w,2)$ mennyiség például az alábbi módon realizálható:

**1**54**234**123331

és

154234**12333**1 .

Ez egyből adja az egyik irányú egyenlőtlenséget.

1.4.3. MEGJEGYZÉS Sok sorozatkészlet összege elérheti a maximumot, ezek között lehetnek különböző hosszúság-összetételűek. Egy $L(w,k)$-t megvalósító készlet nem mindig bővíthető $L(w,k+1)$ egy realizációjává.

1.4.4. PÉLDA Legyen $w' = 344233112223$. Megfigyelhető, hogy $L(w',1) = 6 = L(w,1)$, $L(w',2) = 9 = L(w,2)$ és így tovább, $L(w',k) = L(w,k)$ minden $k$-ra. Felmerül a kérdés, hogy ez vajon véletlen-e. Látni fogjuk, hogy nem. Észrevehető, hogy $w'$ és $w$ Knuth-ekvivalensek, ez az oka a fenti jelenségnek.

1.4.5. ÁLLÍTÁS *Ha $w \equiv w'$ akkor $L(w,k) = L(w',k)$ minden $k \geq 1$ esetén.*

BIZONYÍTÁS Elegendő annyit ellenőrizni, hogy az állítás igaz elemi Knuth-transzformációkra.

$$\underbrace{\alpha \cdot yxz \cdot \beta}_{w} \equiv \underbrace{\alpha \cdot yzx \cdot \beta}_{w'} \text{ ha } x < y \leq z$$

$$\underbrace{\alpha \cdot xzy \cdot \beta}_{w} \equiv \underbrace{\alpha \cdot zxy \cdot \beta}_{w'} \text{ ha } x \leq y < z$$

A $w' \mapsto w$ átmenet esetén a növekvő részsorozatokból növekvő részsorozatok lesznek, ezért $L(w,k) \geq L(w',k)$. A Knuth-transzformáció során ti. annyi történik, hogy az $xy$ pár megszűnik inverzióban lenni.

A másik irányú egyenlőtlenségért jobban meg kell dolgozni. Tegyük fel, hogy adott $k$ darab diszjunkt növekvő részsorozat $w$-ből. Elég lesz ez esetben $k$ darab diszjunkt $w'$-beli növekvő részsorozatot produkálni, amelyek összhossza legalább akkora, mint a kiindulásul vett $w$-beli készleté. Ha nincs olyan részsorozat a kiindulási részsorozat-rendszerben, amelyben mind $x$, mind $z$ szerepel, ráadásul egymás után, akkor készen vagyunk, mert az eredeti készlet változtatás nélkül megfelel a célnak. Ellenkező esetben viszont előfordulhat, hogy a részsorozatunk Knuth-transzformáltja $w'$-ben már nem lesz növekvő $x$ és $z$ felcserélése miatt.

Tételezzük fel tehát, hogy

$$\alpha_1 xz\beta_1$$

egy ilyen "rossz" sorozat, ahol $\alpha_1 \subseteq \alpha, \beta_1 \subseteq \beta$. Ha $y$ semelyik más, a $w$-beli induló készletben szereplő részsorozatban nem szerepel, akkor az

$$\alpha_1 xz\beta_1$$

részsorozatot kicseréljük a

$$\alpha_1 yz\beta_1$$

részsorozatra (vagy $\alpha_1 xy\beta_1$-re) és ismét csak készen vagyunk. A kritikus eset az, ha a $w$-beli részsorozataink között szerepel egy

$$\alpha_2 y\beta_2$$

alakú (azaz egy olyan, amely $y$-t tartalmazza). Ekkor a megoldás a következő:

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 xz\beta_1 \\ \alpha_2 y\beta_2 \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 xy\beta_2 \\ \alpha_2 z\beta_1 \end{array} \right\}$$

illetve

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 xz\beta_1 \\ \alpha_2 y\beta_2 \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \alpha_2 yz\beta_1 \\ \alpha_1 x\beta_2 \end{array} \right\} .$$

□

Az ily módon kapott új $w'$-beli részsorozatok mindkét esetben növekvőek és diszjunktat egymástól és a többi részsorozattól is. Ezzel sikerült egy, az eredeti $w$-beli készlettel azonos összhosszú $w$-beli részsorozathalmazt készíteni.

Az 1.4.4. Példa-beli $w'$ sorozatnál megfigyelhetjük, hogy az $L(w,k)$ invariánsokat egy tabló szaváról könnyű leolvasni. Ennek oka az, hogy egy növekvő részsorozat (a tablóban nézve) soha nem halad lefelé. Emiatt a részsorozat elemei mind különböző oszlopokból kerülnek ki. Azaz ha $w = w(T)$, akkor

$$L(w,1) = T \text{ első sorának hossza.}$$

Az iménti megfigyelést általánosítja az alábbi lemma.

1.4.6. LEMMA *Legyen $w$ a $\lambda$ alakú $T$ tabló szava,*

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k) ,$$

*és $\lambda_l = 0$ ha $l > k$. Ekkor minden $k \geq 1$ esetén*

$$L(w,k) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k .$$

BIZONYÍTÁS Tetszőleges $k$ darab diszjunkt növekvő sorozat esetén minden oszlopból összesen legfeljebb $k$ kockát tartalmazhat a részsorozatok uniója. Eszerint

$$L(w,k) \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \, .$$

Az egyenlőség az első $k$ sor mint növekvő részsorozatok választásával adódik. □

1.4.7. KÖVETKEZMÉNY *Legyen $w$ egy tetszőleges szó. Ha $w = w(T)$ valamely $T$ tablóra, akkor a $T$ tabló $\lambda$ alakja egyértelműen meghatározott.*

Ezek szerint nem fordulhat elő az az eset, amikor $w$ két különböző alakú tablónak is a szava. Célunk ennél ambíciózusabb, adott szó esetén magát azt a $T$ tablót is rekonstruálni akarjuk, amelynek szavával $w$ Knuth-ekvivalens.

ÖTLET Próbáljuk meg kitalálni, hová kerül a legnagyobb elem! (Mint mindig, azonos számok közül a szóban jobbra lévőt tekintjük nagyobbnak.) □

1.4.8. PÉLDA Legyen

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

Egy pillanatra vegyük ki a jobb alsó sarokban szereplő 4-est és vizsgáljuk meg az így kapott tabló alakját.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 3 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

A fennmaradó doboz lesz a kivett 4-es helye, majd ezt az eljárást folytatjuk.

Másképpen elmondva: ha a $344|233|112223$ szóból kivesszük a legnagyobb számot, ami jelen esetben a második 4-es (azonos számok közül a jobbra lévő számít nagyobbnak), akkor az annak megfelelő tabló az eredeti tablóból úgy kapható meg, hogy elhagyjuk az eredeti tablóból a második négyesnek megfelelő elemet.

Azt kéne már csak tudni, hogy Knuth-ekvivalens szavakból kivéve a legnagyobb elemeiket, ismét Knuth-ekvivalens szavakhoz jutunk. Szerencsére ennél több is igaz.

1.4.9. LEMMA *Legyenek $w \equiv w'$ Knuth-ekvivalens szavak. Vegyük ki mindkettőből a $p$ legkisebb és $q$ legnagyobb elemet, jelölje az eredményeket $w_0, w_0'$. Ekkor*

$$w_0 \equiv w_0' \, .$$

BIZONYÍTÁS Vegyük észre, hogy elég a fenti állítást a legnagyobb elem kivételére (azaz a $p = 0, q = 1$ esetre) igazolni, hiszen a legkisebb elem kivételére (amint azt látni fogjuk) szóról szóra átvihető az érvelés, ebből a két esetből pedig már teljes indukcióval következik az általános eset.

Amint már többször is láttuk, egy Knuth-ekvivalenciára vonatkozó állítást elegendő az elemi Knuth-transzformációk esetére bebizonyítani. Bármelyik transzformáció két oldala esetén, ha a szavakban előforduló legnagyobb elem $x, y, z$-től különbözik, akkor a kivételével kapott szavak is ugyanazon transzformáció szerint (elemien) Knuth-ekvivalensek lesznek.

Amennyiben a legnagyobb elem $x$,$y$ és $z$ közül kerül ki, akkor $z$ kell, hogy legyen, és a kivétele után kapott szavak Knuth-ekvivalensek maradnak. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

Az iménti lemma következményeként be tudjuk látni, hogy minden szó legfeljebb egy $T$ tabló szavával ekvivalens.

1.4.10. ÁLLÍTÁS *Ha $w \equiv w(T) \equiv w(T')$, akkor $T = T'$.*

BIZONYÍTÁS A $w$ szó hosszára vonatkozó teljes indukciót fogunk használni. Az alapeset, $|w| = 1$ láthatóan igaz. Legyen $|w| = d > 1$. Az 1.4.7. következmény szerint $T$ alakja egyértelműen meghatározott, mivel

$$\lambda_k = L(w,k) - L(w,k-1) \ .$$

Ha $x$ a legnagyobb betű $w$-ben, akkor legyen $w_0$ az a szó, amit úgy kapunk, hogy töröljük $w$-ből $x$ legjobboldalibb előfordulását. Legyen továbbá $T_0$ az a tabló, amelyet $x$ legjobboldalibb $T$-beli előfordulásának törlésével kapunk. $T_0$ valóban tabló lesz, mert a törölt kocka külső sarok kell, hogy legyen.

A tabló szavának definíciója alapján

$$w(T_0) = w(T)_0 \ .$$

Az 1.4.9. Lemma miatt

$$w_0 \equiv w(T_0) \ .$$

Az indukciós feltevés szerint $T_0$ az egyetlen tabló, amelyre

$$w(T_0) \equiv w_0 \ .$$

Mivel a $T, T_0$ tablók alakjait ismerjük , az egyetlen lehetőség $T$-re, hogy a $T_0$ tablóhoz az imént törölt dobozban hozzáadjuk az $x$ elemet. □

## 1.5. A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetés

Tovább folytatva a Young-tablók kombinatorikájával való mélyebb ismerkedést, a jelen alfejezetben olyan bijektív megfeleltetéseket tanulmányozunk, amelyek adott hosszú szavakat és bizonyos feltételeknek eleget tevő azonos alakú tablópárokat kötnek össze.

1.5.1. DEFINÍCIÓ *Tetszőleges $w$ szóra jelölje $P(w)$ azt az egyértelműen meghatározott $P(w)$ tablót, amelyre*

$$w \equiv w(P(w)) \ .$$

1.5.2. MEGJEGYZÉS Láttuk, hogy ha $w = x_1 \dots x_r$ akkor

$$P(w) = \Big( \dots \Big( \boxed{x_1} \leftarrow x_2 \Big) \leftarrow \dots \leftarrow \Big) \leftarrow x_r \ .$$

1.5.3. MEGJEGYZÉS Mivel minden szó pontosan egy tabló szavával Knuth-ekvivalens (1.3.10. Tétel), a definíció értelmes.

A sorbaillesztési lemma kapcsán láttuk (1.1.27.), hogy a sorbaillesztés megfordítható, amennyiben ismerjük a hozzáadott doboz(ok) helyét. Eszerint $w$-t magát is (és nem csak a Knuth-ekvivalenciaosztályát) visszaállíthatjuk $P(w)$-ből, feltéve, hogy tudjuk a dobozok beillesztési sorrendjét. Ezt precízebben az alábbi módon tarthatjuk számon: miközben $P(w)$-t felépítjük, párhuzamosan építünk egy $Q(w)$ tablót, $w$ ún. beillesztési tablóját. A $Q(w)$ tablót úgy készítjük, hogy a $P(w)$ tabló építése során $k$-adikként hozzáadott dobozba egy $k$ elemet írunk.

Más szóval, ha $P_k = (\dots) \leftarrow x_k$, akkor a $P_k - P_{k-1}$ halmazban szereplő egyetlen kockába egy $k$ elemet teszünk. Mivel egy új kocka mindig külső sarok, az új elem nagyobb lesz, mint felső illetve baloldali szomszédai. Emiatt $Q(w)$ valóban Young-tabló lesz.

1.5.4. PÉLDA Legyen $w = 427351$. Ekkor a $P_k, Q_k$ tablópárok sorozata az alábbi módon alakul.

$$\begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&7\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 4&7\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&5\\\hline 4&7\\\cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&7\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2} 6\\\cline{1-1}\end{array}$$

Mindjárt látni fogjuk, hogy $(P(w), Q(w))$ ismeretében vissza tudjuk állítani $w$-t inverz sorbaillesztéssel.

1.5.5. TÉTEL (ROBINSON–SCHENSTED-MEGFELELTETÉS) *Az $[m]$-beli elemekből álló $n$ hosszú szavak, illetve a $(P,Q)$ azonos alakú $n$ dobozt tartalmazó $[m]$-beli elemeket tartalmazó tablópárok, amennyiben azonos alakúak és $Q$ standard, egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető.*

BIZONYÍTÁS Egy $w$ szóhoz egyértelműen hozzá tudjuk rendelni a $P(w), Q(w)$ tablópárt. Most megkonstruáljuk ennek a leképezésnek az inverzét.

Adott $(P,Q)$ esetén a következő a teendő: Vegyük a legnagyobb sorszámú dobozt $Q$-ban, és alkalmazzunk inverz sorbaillesztést a neki megfelelő $P$-beli kockára. A sorbaillesztés végén a tablóból kikerülő elem lesz a $W(P,Q)$ szó utolsó betűje. Végül töröljük $Q$-ból a legnagyobb elemet tartalmazó dobozt. Ezt az eljárást iterálva felépítjük a $(P,Q)$ tablópárhoz tartozó szót. Könnyen látható, hogy a két leképezés egymás inverze. □

1.5.6. MEGJEGYZÉS Egy standard tabló ekvivalens a dobozok egy olyan számozásával, hogy a $k$ legnagyobb elemet törölve ismét tablót kapunk (ahol $1 \leq k \leq n$, $n$ a tabló dobozainak a száma).

Knuth általánosította a a Robinson–Schensted megfeleltetést arra az esetre, ha $Q$ nem standard, vagyis tetszőleges azonos alakú $(P,Q)$ rendezett tablópárra. Észrevette ugyanis, hogy az iménti bizonyítás változatlan formában átvihető erre az általánosabb esetre azzal az egyszerű és általunk már eddig is használt konvencióval, hogy azonos elemek közül a jobbra lévőt tekintjük nagyobbnak.

1.5.7. TÉTEL (ROBINSON–SCHENSTED–KNUTH-MEGFELELTETÉS) *Az $[m]$-beli elemekből álló $n$-dobozú azonos alakú rendezett $(P,Q)$ tablópárok illetve az $[m]$-beli elemeket tartalmazó $n$-hosszú szavak között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető.*

1.5.8. PÉLDA Válasszuk most a $w = 437341$ szót. A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetésben kapott tablópárok:

$$\begin{array}{|c|}\hline 4\\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\ \hline 4\\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 7\\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3\\ \hline 4 & 7\\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 3 & 4\\ \hline 4 & 7 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5\\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4\\ \hline 3 & 7 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5\\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Folytassuk tovább a fenti vizsgálódást. Legyen a $(P,Q)$ rendezett tablópárból az algoritmus során a $k$-adik lépésben kapott tablópár $(P_k,Q_k)$, továbbá legyen a $(P_k,Q_k)$ párból kiütött elempár $(v_k,u_k)$. Ily módon egy $2\times r$-es tömböt kapunk:

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_r \\ v_1 & \dots & v_r \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy ha $Q$ standard, akkor a felső sor $1,2,\dots,r$.

1.5.9. DEFINÍCIÓ *Egy pozitív egész számokat tartalmazó $2\times r$-es tömböt*

1. *szó*nak nevezünk, ha első sora $1,2,\dots,r$ (ebben a sorrendben);*

2. permutáció*nak nevezünk, ha szó és a második sora $1,2,\dots,r$ valamilyen sorrendben.*

Felmerül a kérdés, hogy milyen tömbök állnak elő a $(P,Q)$ tablópárokból. Először is, mivel minden lépésben $Q_k$ legnagyobb elemét vesszük ki,

$$u_1 \le u_2 \le \dots \le u_r \; .$$

Másodszor, ha $u_{k-1} = u_k$, akkor a $P_k$-ból kivett $B'$ doboz az sorbaillesztési lemma alapján szigorúan jobbra van a $P_{k-1}$-ből kiveendő $B$ doboztól, ezért $v_{k-1} \leq v_k$. Összefoglalva a következő eredményre jutunk.

1.5.10. ÁLLÍTÁS *A $(P,Q)$ tablópárokból kapott $2 \times r$-es tömbök oszlopai olyan lexikografikus sorrendben vannak, amelyben az első sornak van precedenciája.*

Ez az állítás megfordítható, erről szól a Robinson–Schensted–Knuth megfeleltetés alábbi változata.

1.5.11. TÉTEL *A $2 \times r$-es lexikografikusan rendezett tömbök és az $r$ kockából álló azonos alakú tablópárok között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető.*

1.5.12. MEGJEGYZÉS A megfeleltetés során $A$ pontosan akkor szó, ha $Q$ standard és pontosan akkor lesz permutáció, ha $P$ és $Q$ mindegyike standard.

BIZONYÍTÁS Már láttuk hogyan lehet egy megfelelő tablópárhoz egy $A$ tömböt rendelni. Azt kell még megmutatni, hogy az $A$ tömbből a $(P,Q)$ egyértelműen visszaállítható. Erre az ismert sorbaillesztéses módszert alkalmazzuk.

$$(P_1, Q_1) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \boxed{v_1}, \boxed{u_1} \right) ,$$

majd $(P_{k-1}, Q_{k-1})$-ből úgy kapjuk $(P_k, Q_k)$-t, hogy $v_k$-t beillesztjük $P_{k-1}$-be és az újonnan keletkező dobozt $u_k$ tartalommal hozzáírjuk $Q_{k-1}$-hez. A sorbaillesztéssel készített $P_k$ tabló lesz, $Q_k$ esetén ez nem látszik azonnal.

A konstrukcióból adódóan $Q_k$ sorai növekvőek lesznek. Vizsgáljuk meg most az oszlopokat. Tegyük fel, hogy $u_k$ alá került $u_i$ (értelemszerűen $i < k$). Ha a tablótulajdonsággal ellentétben $u_i \geq u_k$ (ekkor persze igazából csak $u_i = u_k$ lehet). Ez esetben $A$ lexikografikus rendezettsége miatt

$$v_i \leq v_{i+1} \leq \cdots \leq v_k .$$

Azonban ekkor a sorbaillesztési lemma miatt a $P_i$-től $P_k$-ig lévő új dobozok mind különböző oszlopokba kerülnének, ezért $u_k$ nem lehetne $u_i$ alatt. □

1.5.13. PÉLDA Tekintsük a

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tömböt. A neki megfelelő tablópár:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Egy fontos és némileg meglepő tény a Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetéssel kapcsolatban a következő.

1.5.14. TÉTEL (SZIMMETRIA-TÉTEL) *Megtartva az eddigi jelöléseinket, ha a*

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_r \\ v_1 & \dots & v_r \end{pmatrix}$$

*tömb a $(P,Q)$ tablópárnak felel meg az RSK-megfeleltetésben, akkor a*

$$\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_r \\ u_1 & \dots & u_r \end{pmatrix}$$

*tömb a $(Q,P)$ párnak.*

BIZONYÍTÁS A bizonyítás (ld. [12, Chapter 4]) elég összetett, és ismerete nem visz minket lényegesen közelebb a céljainkhoz. □

A $2 \times r$-es tömbök sorai tehát csak látszólag töltenek be különböző szerepet.

1.5.15. KÖVETKEZMÉNY *Ha $A$ permutáció, akkor $P(A^{-1}) = Q(A)$ és $Q(A^{-1}) = P(A)$.*

Az RSK-megfeleltetésnek van egy alternatív mátrix-alakja. Tekintsük a kétsoros $A$ tömböt. Ebből könnyen kaphatunk egy $\alpha$ mátrixot az alábbi recept szerint. Ha az első sor elemei $[m]$-beliek, a második sor elemei $[n]$-beliek, akkor

$$\alpha(A) \in M_{m\times n}(\mathbb{Z}) \ ,$$

ahol

$$\alpha_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \text{az} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \text{oszlop előfordulásainak száma.}$$

1.5.16. PÉLDA Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tömböt. A neki megfelelő $2 \times 3$-as nemnegatív egész elemű mátrix

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rögtön látható, hogy az $\alpha$ tömbből $A$ egyértelműen visszaállítható (felírjuk az $\alpha$ által meghatározott párokat és lexikografikus sorrendbe rendezzük őket).

1.5.17. TÉTEL (RSK MÁTRIX-ALAKJA) *A $P \in [n], Q \in [m]$ azonos alakú tablók rendezett párjai, illetve az $\alpha \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ mátrixok között egy-egyértelmű megfeleltetés van.*

1.5.18. MEGJEGYZÉS Mátrixokkal leírva az $A$ tömb két sorának cseréje az $\alpha$ tömb transzponálásának felel meg. Ezen a nyelven a szimmetria-tétel úgy hangzik, hogy ha $(P,Q)$ az $\alpha$ tömbnek felel meg, akkor $(Q,P)$ az $\alpha^T$ tömbnek.

1.5.19. MEGJEGYZÉS Az $\alpha$ mátrix $i$-edik sorösszege megadja $i$ előfordulásainak számát $Q$-ban. Hasonlóan, a $j$-edik oszlopösszege a $j$ elem előfordulásainak száma $P$-ben.

Az alábbiakban az RSK-megfeleltetés pár alkalmazásával ismerkedünk meg. Elsőként tekintsük az alábbi, már Cauchy által is ismert azonosságot.

1.5.20. ÁLLÍTÁS (CAUCHY–LITTLEWOOD)

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-x_iy_j}=\sum_{\lambda}s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_m)$$

*ahol $\lambda$ végigfut az összes partíción, $s_\lambda$ pedig a $\lambda$ partícióhoz tartozó Schur-polinom (ld. 1.1.7.).*

BIZONYÍTÁS Idézzük fel az $\frac{1}{1-x_iy_j}$ racionális törtfüggvény formális hatványsorfejtését:

$$\frac{1}{1-x_iy_j}=1+x_iy_j+(x_iy_j)^2+\cdots+(x_iy_j)^k+\dots .$$

Eszerint a képlet baloldala

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-x_iy_j} &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(1+x_iy_j+(x_iy_j)^2+\cdots+(x_iy_j)^k+\dots\right)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha\in M_{m\times n}}\prod_{1\le i\le m,1\le j\le n}(x_jy_i)^{\alpha_{ij}}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(P,Q)}x^Py^Q\end{aligned}$$

ahol a legbelső összegzés az összes olyan páron fut végig, amelyekre $(P,Q)$ azonos alakú tablók, $P$ $[n]$-beli, $Q$ $[m]$-beli elemekkel. Ha $\alpha$ a $(P,Q)$ tablópárnak felel meg, akkor

$$\prod_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}(x_jy_i)^{\alpha_{ij}}=x^Py^Q .$$

□

Másrészt

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(P,Q)}x^Py^Q &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\lambda\vdash n}s_\lambda(x)s_\lambda(y)\\ &= \sum_{\lambda}s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_m) .\end{aligned}$$

1.5.21. DEFINÍCIÓ

$$\begin{aligned}f^\lambda &\stackrel{def}{=} \text{a } \lambda \text{ alakú standard tablók száma.}\\ d_\lambda(m) &\stackrel{def}{=} \text{az } [m]\text{-beli elemekből álló } \lambda\text{-alakú tablók száma.}\end{aligned}$$

1.5.22. FELADAT *Mutassuk meg a Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetés segítségével, hogy*

$$n!=\sum_{\lambda\vdash n}\left(f^\lambda\right)^2 ,$$

*illetve*

$$m^n = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda(m) f^\lambda \, .$$

1.5.23. FELADAT *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{|\lambda|=n} f^\lambda = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! \cdot 2^k \cdot k!} \, .$$

1.5.24. FELADAT *Legyen $\lambda$ rögzített partíció, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Igazoljuk, hogy a $\lambda$ alakú, $(m_1, \ldots, m_n)$ tartalmú tablók száma megegyezik a $\lambda$ alakú, $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(n)})$ tartalmú tablók számával.*

## 1.6. Littlewood–Richardson-együtthatók

Mostanára jutottunk el oda, hogy sort keríthessünk a tablókalkulus központi eredményére, az úgynevezett Littlewood–Richardson-szabályra. A Littlewood–Richardson-szabály komoly szerepet játszik a Young-tablók sok alkalmazásában, így például a szimmetrikus és az általános lineáris csoportok reprezentációinak leírásában (Clebsch–Gordan-probléma), és az ún. Schubert-kalkulusban, ami nem más, mint a Grassmann-varietások kohomológiagyűrűiben való számolás.

Elsőként egy új fogalom. Legyenek $\lambda, \mu, \nu$ partíciók, $n, m, r$ a bennük lévő dobozok számai. Azt fogjuk vizsgálni, hogy egy rögzített $\nu$-alakú $V$ tabló hányféleképpen áll elő

$$V = T \cdot U$$

alakban, ahol $T$ alakja $\lambda$, $U$ alakja $\mu$. Látni fogjuk, hogy meglepő módon ez a szám nem $V$-től, csupán az alakjától függ.

1.6.1. DEFINÍCIÓ (LITTLEWOOD–RICHARDSON-SZÁM) *Legyenek $\lambda, \mu, \nu$ partíciók, $V$ egy $\nu$-alakú tabló. Azt a számot, ami megadja, hogy $V$ hányféleképpen írható*

$$V = T \cdot U$$

*alakba, ahol $T$ $\lambda$-alakú, $U$ $\mu$-alakú tabló, a $\lambda, \mu, \nu$ partícióhármashoz tartozó* Littlewood–Richardson-szám*nak nevezzük; jelölése $c^\nu_{\lambda\mu}$*

1.6.2. MEGJEGYZÉS Természetesen ahhoz, hogy az iménti definíció értelmes legyen, be kell látni, hogy $c^\nu_{\lambda\mu}$ független a $V$ tabló választásától. Ez nem magától értetődő, az alfejezet egy jókora részében pontosan ezen fogunk dolgozni.

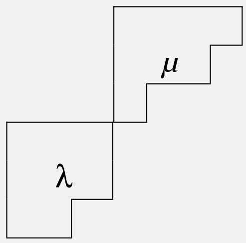
1.6.3. MEGJEGYZÉS Rögtön adódik a definícióból, hogy

$$c^\nu_{\lambda\mu} = 0$$

hacsak nem $r = m + n$ és $\lambda, \mu \subseteq \nu$. Ez csak elégséges, de nem feltétlenül szükséges feltétel.

1.6.4. FELADAT *Adjunk meg olyan $\lambda,\mu,\nu$ partíciókat és $V$ $\nu$-alakú Young-tablót, amelyekre teljesül hogy $|\lambda|+|\mu|=|\nu|$, $\lambda,\mu\subseteq\nu$, azonban mégis $c^{\nu}_{\lambda\mu}=0$.*

1.6.5. ÁLLÍTÁS *A fenti jelöléssel $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ azon $S$ ferde tablók száma, amelyek alakja*




*és amelyekre $V=\mathrm{Rect}(S)$.*

BIZONYÍTÁS A Littlewood–Richardson-számok definíciójából és a ferde tablók kiegyenesítéséből következik. □

1.6.6. MEGJEGYZÉS A Littlewood–Richardson együtthatóknak még sok további alternatív definíciója van, példaként most megemlítjük az alábbit: ha $U$ rögzített $\mu$-alakú tabló, akkor

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = \text{ azon } \nu/\lambda \text{ alakú } S \text{ ferde tablók száma, amelyekre } \mathrm{Rect}(S)=U.$$

Nézzünk meg egy pár egyszerű példát.

1.6.7. PÉLDA Legyen $\lambda=(2,1),\mu=(1),\nu=(3,1)$, azaz határozzuk meg a

$$c^{(3,1)}_{(2,1),(1)}$$

Littlewood-Richardson-együtthatót. Az első definíciónk szerint ehhez azt kell kiszámítani, hogy egy $\nu$ alakú hányféleképpen áll elő mint egy $\lambda$ alakú és egy $\mu$ alakú tabló szorzata. Válasszuk $V$-nek az

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline a&b\\\hline c\\\cline{1-1}\end{array}\cdot\begin{array}{|c|}\hline d\\\hline\end{array},$$

ahol az $a,b,c,d$ elemek az $1,2,3,4$ számok megfelelő permutációi. Mivel a $d$ elem beillesztésénél nem történt kiütés (ez esetben az új kocka nem az első sor, hanem a második sor végére került volna), az új kocka a 3-ast tartalmazó, más változás pedig a tablóban nem történt. Ezek szerint a $V$ tabló fenti típusú szorzatelőállítása egyértelmű, az egyetlen lehetséges mód

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\cdot\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}.$$

Ezért

$$c^{(3,1)}_{(2,1),(1)} = 1\,.$$

1.6.8. PÉLDA Változtassunk egy kicsit az előző példán, legyen most $\lambda=(3),\mu=(1),\nu=(3,1)$. Referenciatablónak ismét válasszuk a

$$V=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$$

tablót. A kérdés megint az, hogy hányféleképpen áll elő $V$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline d \\ \hline\end{array}$$

alakban. Mivel a $d$ elem beillesztésénél az új kocka a második sor végére kerül, $d$ kisebb a $(3)$ alakú tabló minden eleménél. Ezért $d = 1$ és más változás a $(3)$ alakú tablóban nincs. Mivel $a < b < c$ a tablótulajdonság és az elemek különbözősége miatt, így az egyetlen lehetséges eset

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array} .$$

1.6.9. PÉLDA A legkisebb olyan $\nu$ partíció, amelyre $c^{\nu}_{\lambda\mu} \neq 1$,

$$\nu = (3,2,1).$$

Egész pontosan

$$c^{(3,2,1)}_{(2,1),(2,1)} = 2 ,$$

mivel az

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

tabló kétféleképpen is előáll

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline d & e \\ \hline f \\ \cline{1-1}\end{array}$$

alakban. Erről gyorsan meggyőződhetünk elemi úton, de később be fogjuk látni más eszközökkel.

1.6.10. FELADAT *Határozzuk meg a $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ Littlewood–Richardson-együtthatókat az alábbi esetekben.*

1. $\lambda = (4)$, $\mu = (3)$, $\nu = (7)$.
2. $\lambda = (2)$, $\mu = (2)$, $\nu = (2,2)$.
3. $\lambda = (2)$, $\mu = (1,1)$, $\nu = (2,2)$.
4. $\lambda = (3)$, $\mu = (2,1)$, $\nu = (3,3)$.
5. $\lambda = (3)$, $\mu = (1,1,1)$, $\nu = (3,3)$.
6. $\lambda = (2,2)$, $\mu = (1,1)$, $\nu = (3,3)$.

1.6.11. DEFINÍCIÓ *Legyen* $U_0$ $\mu$ *alakú,* $V_0$ $\nu$*-alakú tabló. Ekkor*

$$\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0) \stackrel{def}{=} \{\, S \ \nu/\lambda \text{ alakú ferde tabló, } \mathrm{Rect}(S) = U_0 \}$$

$$\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0) \stackrel{def}{=} \{\, T \ \lambda \text{ alakú tabló, } U \ \mu \text{ alakú, } T \cdot U = V_0 \} \ .$$

1.6.12. TÉTEL *Tetszőleges* $\mu$ *alakú* $U_o$ *és* $\nu$ *alakú* $V_0$ *tablók esetén a* $\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$ *és* $\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$ *halmazok között bijektív megfeleltetés létesíthető.*

A bizonyítás lelke az alábbi technikai jellegű lemma, amit majd a tétel bebizonyítása után látunk be.

1.6.13. LEMMA *Legyen*

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix}$$

*lexikografikusan rendezett tömb,* $(P, Q)$ *az RSK megfeleltetésben hozzárendelt tablópár,* $T$ *tetszőleges tabló. Hajtsuk végre az alábbi sorbaillesztéseket:*

$$(\dots(T \leftarrow v_1) \leftarrow \dots \leftarrow v_{m-1}) \leftarrow v_m \ ,$$

*majd helyezzük az*

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

*elemeket megfelelő alakú üres diagramban az újonnan keletkező elemek dobozaiba. Ekkor az* $u_1, \dots, u_m$ *elemek dobozai egy olyan* $S$ *ferde tabló alkotnak, amelyre*

$$\mathrm{Rect}(S) = Q \ .$$

Mielőtt belekezdenénk a tétel bizonyításába, nézzük meg, egy példán a lemma tartalmát.

1.6.14. PÉLDA Legyen

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array} \ .$$

Ekkor

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{és} \quad Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \ .$$

A $T$ Young-tablóba történő beillesztés utáni eredmény

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \cline{1-2} 3 & 3 & \\ \cline{1-2} \end{array} \ .$$

Ennek megfelelően

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \phantom{1} & \phantom{1} & 1 \\ \hline \phantom{1} & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 2 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}$$

és

$$\mathrm{Rect}(S) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} = Q\,,$$

amint azt állítottuk.

BIZONYÍTÁS (1.6.12. Tétel) Legyen $[T;U] \in \mathcal{T}(\lambda,\mu,V_0)$ valamely rögzített $\nu$ alakú $V_0$ tablóra. Tekintsük az $(U,U_0)$ párnak megfelelő

$$\begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_m \\ v_1 & \ldots & v_m \end{pmatrix}$$

lexikografikus tömböt. Illesszük be $v_1,\ldots,v_m$ elemsorozatot $T$-be és jelölje $S$ azt a ferde tablót, amelyet az $u_1,\ldots,u_m$ elemeknek a megfelelő új dobozokba történő beírásával kapunk.

Mivel

$$V_0 = T \cdot U = (\ldots(T \leftarrow v_1) \leftarrow \ldots) \leftarrow v_m\,,$$

a $V_0$ tabló alakja $\nu$, és az 1.6.13. Lemma szerint $S \in \mathcal{S}(\nu/\lambda,U_0)$. Ezzel az egyik irányt beláttuk.

Megfordítva, legyen $S \in \mathcal{S}(\nu/\lambda,U_0)$, és válasszunk egy tetszőleges $\lambda$ alakú $T_0$ tablót, amelyre igaz, hogy $T_0$ minden eleme kisebb az $S$ ferde tabló minden eleménél. Jelölje $(T_0)_S$ azt a $\nu$-alakú tablót, amelyet úgy kapunk, hogy $S$ üres dobozaiba beírjuk $T_0$-t. A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetés szerint a $(V_0,(T_0)_S)$ $\nu$ alakú tablópár a

$$\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n & u_1 & \ldots & u_m \\ x_1 & \ldots & x_n & v_1 & \ldots & v_m \end{pmatrix}$$

lexikografikus tömbnek felel meg valamely $x_1,\ldots,x_n$ elemekre. Figyeljük meg, hogy $T_0$ azon tulajdonsága, miszerint minden eleme kisebb $S$ minden eleménél, biztosítja, hogy a fenti tömb valóban lexikografikusan rendezett legyen. Ekkor

$$\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow (T,T_0)$$

és

$$\begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_m \\ v_1 & \ldots & v_m \end{pmatrix} \longleftrightarrow (U,U_0)$$

alkalmas $T,U$ tablókra, ismét csak az RSK-megfeleltetés szerint. A tablópárok konstrukciója alapján $T \cdot U = V_0$, továbbá a $(T,\ )$ pár második tagja tényleg $T_0$. Az, hogy az $(U,\ )$ pár második tagja valóban $U_0$, ismét az 1.6.13. Lemma következménye. A fentiek alapján

$$[T;U] \in \mathcal{T}(\lambda,\mu,V_0)\,.$$

Az iméntiekből az is következik, hogy a két konstrukció inverze egymásnak. □

BIZONYÍTÁS (1.6.13. Lemma) Válasszunk egy tetszőleges $T^\circ$ tablót, amely azonos alakú $T$-vel és minden eleme kisebb $T$ minden eleménél (szükség esetén használhatunk például negatív számokat). A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetésben

$$(T,T^\circ) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} .$$

Szintén az RSK-megfeleltetésben az

$$\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m & u_1 & \dots & u_m \\ t_1 & \dots & t_m & v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix}$$

tömb pedig egy $(T \cdot P, V)$ azonos alakú tablópárnak fele meg, ahol $V$ egy, az

$$s_1,\dots,s_m,u_1,\dots,u_m$$

elemeket tartalmazó tabló. Állítsuk fejre ez utóbbi tömböt, és tegyük az oszlopait lexikografikus sorrendbe. A Szimmetria-tétel miatt az eredmény a $(V,T \cdot P)$ párnak felel meg, továbbá ha a

$$\begin{pmatrix} t_i \\ s_i \end{pmatrix}$$

oszlopokat kivesszük, a maradék a $(Q,P)$ párhoz tartozik az RSK-megfeleltetésben. Ezért az alsó sor Knuth-ekvivalens az $w(V)$ szóval, az alsó sornak az $s_i$ elemek eltávolítása után kapott maradéka pedig $w(Q)$-val. Látható azonban, hogy $w(V)$-ből törölve az $m$ legkisebb elemet, $w(S)$-t kapjuk. Mivel az $m$ legkisebb elem kivétele megőrzi a Knuth-ekvivalenciát,

$$w(S) \equiv w(Q)$$

ami egyenértékű azzal, hogy $\mathrm{Rect}(S) = Q$. □

1.6.15. KÖVETKEZMÉNY *Az eddigi jelölések megtartásával*

$$|\mathcal{S}(\nu/\lambda,U_0)| = |\mathcal{T}(\lambda,\mu,V_0)| ,$$

*továbbá a két halmaz közös elemszáma nem függ az $U_0$, illetve $V_0$ tablók választásától. Ebből következik, hogy a $c^\nu_{\lambda\mu}$ Littlewood–Richardson-szám jóldefiniált.*

1.6.16. DEFINÍCIÓ (KONJUGÁLT PARTÍCIÓ) *Legyen $n$ pozitív egész szám, $\lambda \vdash n$. A $\lambda$-hoz tartozó $\overline{\lambda}$* konjugált partíciót *úgy kapjuk, hogy $\lambda$ oszlopait $\overline{\lambda}$ sorainak tekintjük és viszont.*

1.6.17. FELADAT *Legyenek $\lambda,\mu,\nu$ partíciók. Mutassuk meg az alfejezet eredményeinek a segítségével, hogy*

$$c^\nu_{\lambda\mu} = c^{\overline{\nu}}_{\overline{\lambda}\overline{\mu}} = c^\nu_{\mu\lambda} .$$

1.6.18. FELADAT *Ellenőrizzük, hogy*

$$c^{(3,3,3)}_{(2,2),(3,2)} = 0 \, .$$

*(Kiindulásként például vehetünk egy olyan $(3,3,3)$-alakú $V$ tablót, amelynek bal felső sarka*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \, ,$$

*majd végiggondolhatjuk a lehetséges kitöltéseket.)*

Noha a matematika számos területén fontosak, a Littlewood–Richardson-számok viselkedéséről általánosságban nem sokat tudunk. Viselkedésük vizsgálata mindmáig aktív kutatás tárgya; a közelmúlt fejleményeiről, többek közt az ún. Horn-sejtés megoldásáról például a [11] cikk ad részletes tájékoztatást. Az alábbi modern eredmény a Littlewood–Richardson-számokra vonatkozó kevés általános tétel egyike, és mint ilyen, igen jelentős.

1.6.19. TÉTEL (SZATURÁCIÓ-TÉTEL; KNUTSON–TAO–WOODWARD) *Tetszőleges $\lambda,\mu,\nu$ partíciók és $N \geq 1$ egész szám esetén*

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = 1 \Leftrightarrow c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} = 1 \, .$$

BIZONYÍTÁS Egy viszonylag közérthető bizonyítás található a [11] cikkben, ahol az eredeti munkákra mutató referenciákat is megtaláljuk. □

A következő gondolat reprezentációelméleti és matematikai fizikából származó (az entrópiával kapcsolatos) megfontolásokból fakad. Az érdeklődő olvasónak ajánljuk a [33] írást.

1.6.20. SEJTÉS (OKOUNKOV LOG-KONKAVITÁSI SEJTÉSE) *A fenti jelölésekkel legyen*

$$f(N) \stackrel{def}{=} c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} \, .$$

*Ekkor*

$$f(N)^2 \geq f(N-1)f(N+1) \, .$$

A fejezet hátralévő részében az alkalmazásokban komoly szerepet játszó Littlewood–Richardson-szabályt tárgyaljuk. Ehhez először is a Littlewood–Richardson-számok egy alternatív jellemzésével ismerkedünk meg, amely túl elméleti jelentőségükön a kiszámításukat is megkönnyíti.

1.6.21. DEFINÍCIÓ *A $w = x_1 \dots x_r$ szót* fordított rácsszó*nak hívjuk, ha minden $1 \leq s \leq r$ esetén $x_s,\dots,x_r$-ben legalább annyi 1 van, mint 2, legalább annyi 2 van, mint 3 és így tovább.*

1.6.22. PÉLDA A 2132121 szó fordított rácsszó, az 1232121 szó ellenben nem.

1.6.23. FELADAT *Hány fordított rácsszót tudunk konstruálni az*

$$1,1,1,2,2,2,3,3,3,3$$

*elemekből?*

1.6.24. DEFINÍCIÓ *Egy $F$ ferde tablót* Littlewood–Richardson-féle ferde tabló*nak (röviden LR-tablónak) nevezünk, ha a tabló $w(F)$ szava fordított rácsszó.*

1.6.25. PÉLDA Tekintsük az $(5,4,3,2)/(3,3,1)$ ferde diagramot. Az alábbi egy Littlewood–Richardson-féle ferde tabló kitöltés:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & 1 \\ \hline & & & 2 & \\ \hline & 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

A következő azonos alakú ferde tabló ellenben nem rendelkezik a Littlewood– Richardson tulajdonsággal:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & 2 \\ \hline & & & 2 & \\ \hline & 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

mivel hátulról olvasva az első három betű 122, azaz ebben a szeletben több 2-es van, mint 1-es.

1.6.26. TÉTEL *Legyenek $\lambda$, $\mu$, $\nu$ tetszőleges partíciók. Ekkor*

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = |\{\, \nu/\lambda \text{ alakú } \mu \text{ tartalmú LR-féle ferde tablók } \}| \ .$$

1.6.27. PÉLDA Legyen $\lambda = (3,2,1), \mu = (3,2,2), \nu = (5,4,3,1)$. A $\nu/\lambda$ diagramnak négy $\mu$ tartalmú ferde tabló kitöltése van, ezek közül háromra teljesül a Littlewood–Richardson-tulajdonság. Így

$$c^{(5,4,3,1)}_{(3,2,1),(3,2,2)} = 3 \ .$$

1.6.28. PÉLDA A legkisebb eset, amikor $c^{\nu}_{\lambda\mu} > 1$: $\lambda = \mu = (2,1)$, $\nu = (3,2,1)$. Amint arról könnyen meggyőződhetünk, egy $(3,2,1)/(2,1)$ alakú diagramnak kétféle $(2,1)$ tartalmú LR-kitöltése van:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 2 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

Tehát

$$c^{(3,2,1)}_{(2,1),(2,1)} = 2 \ .$$

1.6.29. MEGJEGYZÉS Ha $w, w'$ Knuth-ekvivalens szavak, akkor $w$ és $w'$ vagy mindketten fordított rácsszavak, vagy egyik sem (ennek igazolására ismét elég az elemi Knuth-transzformációkat ellenőrizni).

1.6.30. MEGJEGYZÉS Vegyük észre, hogy ha egy $\nu/\lambda$ alakú, $\mu$ tartalmú LR-ferde tablót kiegyenesítünk, akkor egy olyan $\mu$ alakú tablót kapunk, amelynek az $i$-edik sorában csupa $i$ elem áll. Jelölje ezt a tablót $U(\mu)$.

Ezek után belátjuk az iménti tételt.

BIZONYÍTÁS (1.6.26. Tétel) Elég igazolni, hogy

$$\mathrm{Rect}(S) = U(\mu)$$

pontosan akkor, ha $S$ egy LR-ferde tabló $\mu$ tartalommal.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $S$ már tabló. Megmutatjuk, hogy ekkor $S = U(\mu)$, azaz $U(\mu)$ az egyetlen adott alakú $\mu$ tartalmú LR tabló. Ez gyorsan látszik, hiszen a fordított rácsszó tulajdonság miatt az első sor utolsó betűje 1-es, ezért az első sor összes eleme 1 kell, hogy legyen a tabló tulajdonság miatt. Szintén a tabló tulajdonság miatt 1-es máshol, mint az első sorban nem lehet, ezért a tablónk második sorának utolsó eleme 2 lesz. Azonban emiatt az egész második sor csupa 2-esből fog állni, és így tovább.

A ferde tablók kiegyenesítése megőrzi a Knuth-ekvivalenciát. Mivel a Knuth-ekvivalencia viszont megőrzi a fordított rácsszó tulajdonságot, az $S$ ferde tabló pontosan akkor LR, ha $\mathrm{Rect}(S)$ LR, azaz ha $\mathrm{Rect}(S) = U(\mu)$. □

A Littlewood–Richardson-számok fő jelentősége abban áll, hogy segítségükkel le tudjuk írni a tablógyűrűbeli $S_\lambda$ elemek szorzását. Ennek aztán számtalan további alkalmazása van.

1.6.31. TÉTEL (LITTLEWOOD–RICHARDSON-SZABÁLY) *Az $R_{[m]}$ tablógyűrűben*

$$S_\lambda \cdot S_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} S_\nu \ .$$

BIZONYÍTÁS Minden $\nu$ alakú $V$ tabló pontosan $c^\nu_{\lambda\mu}$ módon áll elő mint egy $\lambda$ alakú és egy $\mu$ alakú tabló szorzata. □

1.6.32. MEGJEGYZÉS Korábban láttuk (ld. 1.6.17. Feladat), hogy $c^\nu_{\lambda\mu} = c^\nu_{\mu\lambda}$. Emiatt az $S_\lambda$ elemek által $R_{[m]}$-ben generált részgyűrű kommutatív, noha maga az $R_{[m]}$ gyűrű nem.

A tablógyűrűbeli Littlewood–Richardson-szabályra alkalmazva a

$$\Phi : R_{[m]} \longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$$

homomorfizmust, egy általános formulát kapunk Schur-polinomok szorzására.

1.6.33. KÖVETKEZMÉNY (LITTLEWOOD–RICHARDSON-SZABÁLY SCHUR-POLINOMOKRA) *Legyenek $\lambda$, $\mu$ tetszőleges partíciók, $m$ pozitív egész szám, $s_\lambda$, illetve $s_\mu$ a megfelelő partíciókhoz tartozó $m$-változós Schur-polinomok. Ekkor*

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) s_\mu(x_1, \ldots, x_m) = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu(x_1, \ldots, x_m) \ .$$

# 2. fejezet

# Szimmetrikus polinomok és függvények

Szimmetrikus polinomokkal igen hamar találkozik az ember, talán első előfordulásuk középiskolában a polinomok gyökei és együtthatói közötti összefüggések (Viète-formulák). Az algebrában, számelméletben, kombinatorikában igen sok helyen előfordulnak, ezért a szimmetrikus polinomok elméletének alapjai nagyon hasznosak egy matematikus számára.

## 2.1. Szimmetrikus polinomok és generátorfüggvényeik

A szimmetrikus polinomokat tetszőleges gyűrű vagy test feletti polinomok körében tudjuk definiálni. Mi az egyszerűség kedvéért most az egészegyütthatós esetet részesítjük előnyben.

2.1.1. DEFINÍCIÓ *Egy $f \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_m]$ polinomot* szimmetrikus*nak hívunk, ha az $x_1,\dots,x_m$ változók tetszőleges permutációja esetén változatlan marad; azaz minden $\sigma \in S_m$ választásra*

$$f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}) = f(x_1,\dots,x_m)$$

*$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_m]$-ben.*

2.1.2. MEGJEGYZÉS Az iménti definíciót az alábbi módon is megfogalmazhatjuk: a szimmetrikus polinomok az $S_m$ szimmetrikus csoportnak a $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_m]$ gyűrűbeli invariánsai.

2.1.3. MEGJEGYZÉS A szimmetrikus polinomok részgyűrűt alkotnak. Szimmetrikus polinom minden homogén része is szimmetrikus.

2.1.4. FELADAT *Igazoljuk az előbbi megjegyzés állításait.*

2.1.5. DEFINÍCIÓ *Az $m$-változós $n$-edfokú szimmetrikus polinomok $\mathbb{Z}$-modulusára a $\Lambda_n[m]$ jelölést használjuk, $\Lambda[m]$ pedig az $m$-változós szimmetrikus polinomok fokszámozott gyűrűje.*

Az alábbiakban nevezetes szimmetrikus polinomokat definiálunk, amelyek bizonyos halmazai az adott fokú szimmetrikus polinomok $\mathbb{Z}$-bázisait fogják alkotni. A továbbiakban $n$ rögzített pozitív egész, a kérdéses szimmetrikus polinom foka, $\lambda$ pedig az $n$ szám egy partíciója.

2.1.6. DEFINÍCIÓ (ELEMI SZIMMETRIKUS POLINOMOK) *Az n-edik m-változós elemi szimmetrikus polinom*

$$e_n(x_1,\ldots,x_m) \stackrel{def}{=} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_n\leq m} x_{i_1}\cdots x_{i_n} .$$

2.1.7. DEFINÍCIÓ (TELJES SZIMMETRIKUS POLINOMOK) *Az n-edik m-változós teljes szimmetrikus polinom*

$$h_n(x_1,\ldots,x_m) \stackrel{def}{=} \sum_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_n\leq m} x_{i_1}\cdots x_{i_n} .$$

2.1.8. DEFINÍCIÓ (MONOMIÁLIS SZIMMETRIKUS POLINOMOK) *A*

$$\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$$

*partícióhoz tartozó monomiális szimmetrikus polinom:*

$$m_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m} x_{\pi(1)}^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_{\pi(m)}^{\lambda_m} .$$

A szimmetrikus polinomok között igen fontos szerepet játszanak a már megismert (1.1.7. Definíció) Schur-polinomok. A teljesség kedvéért itt megismételjük a definíciójukat.

2.1.9. DEFINÍCIÓ (SCHUR-POLINOMOK) *Legyen $\lambda$ az $n$ szám egy partíciója, $D$ a neki megfelelő Young-diagram. A $D$ diagram egy tetszőleges, az $1,\ldots,m$ számokkal történő Young-tablószerű $T$ kitöltéséhez hozzárendeljük a*

$$x^T \stackrel{def}{=} \prod_{i=1}^{m} x_i^{\text{az } i \text{ elem előfordulásainak a száma } T\text{-ben}}$$

*monomot. Az $s_\lambda$ Schur-polinom ezek összege, azaz*

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) \stackrel{def}{=} \sum_{T \text{ tabló } D\text{-n}} x^T .$$

Az első fejezet során (1.1.11. Példa) láttuk, hogy a teljes, illetve elemi szimmetrikus polinomok a Schur-polinomok speciális esetei a

$$\lambda = (n) ,$$

illetve

$$\lambda = \underbrace{(1,\ldots,1)}_{n}$$

választással. A fentiek alapján definiálhatjuk az ún. általánosított teljes és elemi szimmetrikus polinomokat:

2.1.10. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ *az* $n$ *szám egy partíciója. Ekkor a* $\lambda$ *partícióhoz tartozó* általánosított elemi szimmetrikus polinom *illetve* általánosított teljes szimmetrikus polinom

$$\begin{aligned} e_\lambda(x) &\stackrel{def}{=} e_{\lambda_1}(x) \cdot \ldots \cdot e_{\lambda_k}(x) \\ h_\lambda(x) &\stackrel{def}{=} h_{\lambda_1}(x) \cdot \ldots \cdot h_{\lambda_k}(x) \ . \end{aligned}$$

2.1.11. PÉLDA Nézzünk példákat kétváltozós szimmetrikus polinomokra. Legyen tehát $m = 2$, és tekintsük a $\lambda = (2,1)$ partíciót. Ekkor

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1,x_2) &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \ , \\ h_\lambda(x_1,x_2) &= h_{\lambda_1}(x)h_{\lambda_2}(x) = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3 \ , \\ e_\lambda(x_1,x_2) &= e_{\lambda_1}(x)e_{\lambda_2}(x) = x_1x_2(x_1+x_2) \\ &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \ , \\ m_\lambda(x_1,x_2) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1}x_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \\ &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \ . \end{aligned}$$

Az első fejezetből maradt egy adósságunk. Ott állítottuk, hogy a Schur-polinomok szimmetrikusak, de nem igazoltuk.

2.1.12. ÁLLÍTÁS *Minden* $m$ *természetes szám és* $\lambda$ *partíció esetén az* $s_\lambda(x_1,\ldots,x_m)$ *Schur-polinom szimmetrikus.*

BIZONYÍTÁS Mivel az $S_m$ szimmetrikus csoportot generálják a szomszédos elemeket felcserélő $(i,i+1)$ alakú transzpozíciók ($1 \leq i \leq m-1$), elegendő belátni, hogy

$$\begin{aligned} (i,i+1)\cdot s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) &\stackrel{\text{def}}{=} s_\lambda(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},x_i,x_{i+2},\ldots,x_m) \\ &= s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) \end{aligned}$$

minden $1 \leq i \leq m-1$ esetén.

Ebből a célból megadjuk a $\lambda$ alakú $T$ Young-tablók egy olyan

$$\pi : T \mapsto T'$$

involúcióját, ami az $i$-k és az $i+1$-k számát felcseréli, miközben a többi szám multiplicitása a tablóban megmarad.

Legyen adott egy $T$ Young-tabló. Az oszlopok felülről lefelé szigorúan növekvőek, így minden oszlop vagy pontosan egy $i$, $i+1$ párt tartalmaz, vagy egyet sem. Hívjuk az $i$, $i+1$ párokat rögzített elemeknek, míg a többi $i$-t és $i+1$-t szabadnak. Ha egy sor tartalmaz $k$

szabad $i$-t, amit $l$ szabad $i+1$ követ, akkor helyettesítsük ezeket $l$ szabad $i$-vel, majd azt követő $k$ szabad $i+1$-gyel. Ily módon az adott sorban felcseréltük a szabad $i$-k és $i+1$-k számát. A fenti műveletet minden sorra elvégezve kapjuk a $T'$ Young-tablót, amit a keresett involúció $T$-hez rendel. Az eredmény valóban Young-tabló lesz a szabad párok definíciója miatt.

Mivel a rögzített párok ugyanannyi $i$-t és $i+1$-t tartalmaznak, ezért ez a leképezés valóban felcseréli az $i$-k és az $i+1$-k számát; a konstrukcióból az is rögtön látszik, hogy $T'$-ből kiindulva $T$-t kapjuk, vagyis az imént definiált $\pi$ hozzárendelés egy involúció. □

Az előző fejezet végén (1.6.33. Következmény) beláttuk, hogy a tablókra vonatkozó Littlewood-Richardson szabályból adódik a Schur-polinomok szorzására vonatkozó Littlewood–Richardson szabály. Ismét csak a teljesség kedvéért álljon itt az említett eredmény.

2.1.13. KÖVETKEZMÉNY (LITTLEWOOD–RICHARDSON-SZABÁLY SCHUR-POLINOMOKRA) *Legyenek $\lambda$, $\mu$ tetszőleges partíciók, $m$ pozitív egész szám, $s_\lambda$, illetve $s_\mu$ a megfelelő partíciókhoz tartozó $m$-változós Schur-polinomok. Ekkor*

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m)s_\mu(x_1,\ldots,x_m) = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu(x_1,\ldots,x_m)\ .$$

A különböző nevezetes szimmetrikus polinomok viselkedésének leírásában fontos szerepet töltenek be a generátorfüggvényeik. Mint generátorfüggvények esetén általában, igen hasznos, ha ezeket a formális hatványsorként adott kifejezéseket gyakran zárt alakban is fel tudjuk írni. Ennek komoly szerepe lesz abban, hogy a különböző nevezetes polinomrendszereket könnyen kit tudjuk egymásból fejezni.

2.1.14. DEFINÍCIÓ *Az $m$-változós elemi szimmetrikus polinomok generátorfüggvénye*

$$e(t,x_1,\ldots,x_m) = e(t,x) \stackrel{def}{=} \sum_{r=0}^{\infty} e_r(x)t^r\ .$$

2.1.15. ÁLLÍTÁS *A fenti jelöléssel*

$$e(t,x) = \prod_{i=1}^{m}(1+x_i t)\ .$$

BIZONYÍTÁS Az elemi szimmetrikus polinomok definíciója miatt $e_r(x) = 0$, ha $r > m$. Az $r \le m$ esetben a képlet jobb oldalán álló szorzatot kifejtve és a kapott tagokat $t$ hatványai szerint csoportosítva kapjuk a keresett állítást. □

2.1.16. DEFINÍCIÓ *Az $m$-változós teljes szimmetrikus polinomok generátorfüggvénye:*

$$h(t,x_1,\ldots,x_m) = h(t,x) \stackrel{def}{=} \sum_{r=0}^{\infty} h_r(x)t^r\ .$$

A teljes szimmetrikus polinomok generátorfüggvénye is megadható zárt alakban elemi úton.

2.1.17. ÁLLÍTÁS

$$h(t,x) = \prod_{i=1}^{m}(1-x_it)^{-1} .$$

BIZONYÍTÁS Fejtsük hatványsorba az $(1-x_it)^{-1}$ kifejezést:

$$(1-x_i\cdot t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x_i^k t^k .$$

Szorozzuk össze az eredményt $1 \le i \le m$-re:

$$\prod_{i=1}^{m}(1-x_it)^{-1} = \prod_{i=1}^{m}(\sum_{k=0}^{\infty} x_i^k t^k) .$$

A jobb oldalon található szorzatot kifejtve és a tagokat $t$ hatványai szerint csoportosítva kapjuk, hogy

$$\prod_{i=1}^{m}(1-x_it)^{-1} = h(t,x) .$$

□

Az elemi és teljes szimmetrikus polinomok között sok érdekes összefüggés bizonyítható. Példaként lássuk a következő azonosságot, amelyet a generátorfüggvények ismeretében nagyon gyorsan be tudunk látni.

2.1.18. ÁLLÍTÁS *Legyenek $m,n \ge 1$ tetszőleges rögzített pozitív egészek. Ekkor*

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r(x)h_{n-r}(x) = 0$$

*az $m$-változós szimmetrikus polinomok körében.*

BIZONYÍTÁS Tekintsük az $m$-változós elemi és teljes szimmetrikus polinomok $e(t,x)$, illetve $h(t,x)$ generátorfüggvényeit. Vegyük észre, hogy

$$h(t,x)\cdot e(-t,x) = \prod_{i=1}^{m}(1-x_it)\cdot\prod_{i=1}^{m}(1-x_it)^{-1} = 1 ,$$

másrészt a generátorfüggvények definíciója szerint

$$\begin{aligned} h(t,x)\cdot e(-t,x) &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} h_r(x)t^r\right)\cdot\left(\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r e_r(x)t^r\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r(x)h_{n-r}(x)\right)t^n . \end{aligned}$$

A $h(t,x)\cdot e(-t,x)$ kifejezésre kapott két eredményben $t^n$ együtthatóját összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r(x)h_{n-r}(x) = 0$$

minden $n \geq 1$ esetén. □

Az eddig ismertetetteken túl a szimmetrikus polinomok egy fontos fajtája az ún. Newton-féle általánosított hatványösszeg. A fejezet során látni fogjuk, hogy ezek abban különböznek az eddig megismert polinomcsaládoktól, hogy a szimmetrikus polinomoknak csak racionális együtthatókkal alkotják bázisát, egész együtthatókkal nem.

2.1.19. DEFINÍCIÓ (NEWTON-FÉLE ÁLTALÁNOSÍTOTT HATVÁNYÖSSZEGEK) *Legyenek $r,m$ tetszőleges pozitív egészek, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ egy partíció. Ekkor*

$$\begin{aligned} p_r(x) &\stackrel{def}{=} x_1^r + \ldots + x_m^r \\ p_\lambda(x) &\stackrel{def}{=} p_{\lambda_1}(x)\ldots p_{\lambda_k}(x)\ . \end{aligned}$$

*Az $m$-változós hatványösszeg-polinomok generátorfüggvénye*

$$p(t,x) \stackrel{def}{=} \sum_{r=1}^{n} p_r(x)t^{r-1}\ .$$

Íme egy újabb nevezetes összefüggés szimmetrikus polinomok között, amelyet megint csak generátorfüggvények segítségével látunk be.

2.1.20. ÁLLÍTÁS *Ha $m,n$ pozitív egész számok, akkor*

$$nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r \cdot h_{n-r}\ .$$

BIZONYÍTÁS A bizonyítás egyik fő összetevője a $x_i/(1-x_it)$ kifejezés $t$ szerinti sorbafejtése:

$$\frac{x_i}{1-x_it} = \sum_{r=1}^{\infty} x_i^r t^{r-1}\ .$$

Vegyük észre, hogy definíció szerint

$$p(t,x) = \sum_{r=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{m} x_i^r)t^{r-1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{\infty} x_i^r t^{r-1}\ ,$$

amiből

$$p(t,x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{1-x_it} = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}\log\frac{1}{1-x_it}$$

következik. A teljes szimmetrikus polinomok generátorfüggvényére kapott képletet felhasználva

$$p(t,x) = \frac{d}{dt}(\log\prod_{i=1}^{m}(1-x_it)^{-1}) = \frac{d}{dt}\log h(t,x) = \frac{h'(t,x)}{h(t,x)} ,$$

amiből

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} rh_r(x)t^{r-1} &= h'(t,x) \\ &= p(t,x)\cdot h(t,x) \\ &= (\sum_{r=1}^{\infty} p_r(x)t^{r-1})\cdot(\sum_{r=0}^{\infty} h_r(x)t^r)\end{aligned}$$

következik. Fejtsük ki az egyenlőséglánc végén lévő szorzatot, és hasonlítsuk össze $t^n$ együtthatóját a baloldalon találhatóval. Azt látjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r} ,$$

amint azt állítottuk. □

2.1.21. FELADAT *Az előző bizonyítás módszerével igazoljuk, hogy*

$$ne_n(x) - p_1(x)e_{n-1}(x) + \cdots + (-1)^n p_n(x) = 0 .$$

Következőként kifejezzük a teljes szimmetrikus polinomokat az általánosított hatványösszegek $\mathbb{Q}$-lineáris kombinációjaként.

2.1.22. DEFINÍCIÓ *Legyen n pozitív egész szám, $\lambda$ az n egy partíciója. Jelölje*

$$z(\lambda) \stackrel{def}{=} \prod_{i\geq 1} i^{m_i}\cdot m_i! ,$$

*ahol $m_i = m_i(\lambda)$ a $\lambda$ partíció i-vel megegyező elemeinek a száma.*

2.1.23. ÁLLÍTÁS *Tetszőleges m,n pozitív egész számok esetén*

$$h_n(x) = \sum_{\lambda:|\lambda|=n} \frac{1}{z(\lambda)}\cdot p_\lambda(x) .$$

BIZONYÍTÁS Először is belátjuk a

$$h(t,x) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)}\cdot p_\lambda(x)t^{|\lambda|}$$

összefüggést. Ezt például az alábbi módon tehetjük meg. A korábban látott

$$p(t,x) = \frac{d}{dt}\log h(t,x)$$

reláció miatt

$$\log h(t,x) = \sum_{r=1}^{\infty} p_r(x)t^r/r ,$$

ily módon

$$h(t,x) = \exp(\sum_{r=1}^{\infty} p_r(x)t^r/r) = \prod_{r=1}^{\infty} \exp(p_r(x)t^r/r) .$$

Az $\exp(p_r(x)t^r/r)$ kifejezést hatványsorba fejtve kapjuk, hogy

$$\exp(p_r(x)t^r/r) = \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(p_r(x)t^r)^{m_r}}{r^{m_r} \cdot m_r!} ,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(p_r(x)t^r)^{m_r}}{r^{m_r} \cdot m_r!} \\ &= \left( \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{(p_1 t)^{m_1}}{1^{m_1} \cdot m_1!} \right) \cdot \ldots \cdot \left( \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(p_r t^r)^{m_r}}{r^{m_r} \cdot m_r!} \right) . \end{aligned}$$

Fejtsük ki a jobboldalon lévő szorzatot; mivel $t^n$ együtthatója egy véges összegből jön, összehasonlítva a két oldalon kapott eredményt azt látjuk, hogy valóban

$$h(t,x) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} \cdot p_\lambda(x) t^{|\lambda|} .$$

Innen viszont rögtön adódik a bizonyítandó állítás. □

Az alábbi tétel további érdekes azonosságokat állapít meg. Ezeknek konkrét jelentősége például akkor lesz, amikor később belátjuk, hogy a $p_\lambda$ hatványösszegpolinomok egy megfelelően választott skalárszorzatra nézve ortogonális bázist alkotnak a szimmetrikus függvények terében. A bizonyítás során támaszkodni fogunk a tablókalkulusról szerzett ismereteinkre.

2.1.24. TÉTEL *(Cauchy-Littlewood) Legyenek n,m pozitív egész számok. Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok.*

1. $\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_\lambda s_\lambda(x_1,\ldots,x_n) s_\lambda(y_1,\ldots,y_m)$
2. $\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_\lambda h_\lambda(x_1,\ldots,x_n) m_\lambda(y_1,\ldots,y_m)$
3. $\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_\lambda \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x_1,\ldots,x_n) p_\lambda(y_1,\ldots,y_m)$.

BIZONYÍTÁS Az első összefüggést már beláttuk az 1.5.20. Állítás bizonyítása során.

A második azonosság igazolásához a következő egyenlőségláncból indulunk ki:

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_{j=1}^{m} \left( \sum_{p=0}^{\infty} h_p(x) y_j^p \right) .$$

Erre az eredményre úgy jutunk, hogy a $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i y_j}$ kifejezést minden rögzített $j$-re hatványsorba fejtjük, majd a tagokat $y_j$ hatványai szerint csoportosítjuk. A lánc jobb végén álló szorzatot kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{p_m=0}^{\infty} h_{p_1}(x) \dots h_{p_m}(x) y_1^{p_1} \dots y_m^{p_m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\sum_i p_i = k} h_{p_1}(x) \dots h_{p_m}(x) y_1^{p_1} \dots y_m^{p_m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\sum p_i = k:\ p_1 \geq \ldots \geq p_m} h_{p_1}(x) \dots h_{p_m}(x) \sum_{\sigma \in S_m} y_{\sigma(1)}^{p_1} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma(m)}^{p_m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\lambda| = k} h_\lambda(x) m_\lambda(y) \\
&= \sum_{\lambda} h_\lambda(x) \cdot m_\lambda(y) ,
\end{aligned}$$

ahogy azt állítottuk.

A harmadik azonosság azonnal következik a 2.1.23. Állításból az $\{x_i y_j : \ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l\}$ változókra alkalmazva. □

## 2.2. A szimmetrikus polinomok alaptétele

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a szimmetrikus polinomok alaptételének egy erős változatát. Legyen $R$ tetszőleges (kommutatív egységelemes) gyűrű. Vizsgálatunk tárgyai az $R[x_1, \ldots, x_n]$ gyűrűbeli szimmetrikus polinomok lesznek. Legyen $t$ egy újabb határozatlan; az alaptételhez az alábbi formulából indulunk ki:

$$\prod_{i=1}^{n} (t - x_i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j e_j t^{n-j} .$$

2.2.1. TÉTEL (A SZIMMETRIKUS POLINOMOK ALAPTÉTELE) *Legyen $R$ kommutatív egységelemes gyűrű, $S \subseteq R[x_1, \ldots, x_n]$ pedig a szimmetrikus polinomok részgyűrűje. Ekkor*

1. *Az $e_0, \ldots, e_n$ elemi szimmetrikus polinomok generálják $S$-t, vagyis minden szimmetrikus polinom felírható, mint $e_0, \ldots, e_n$ egy $R$-beli együtthatós polinomja.*

2. *Az $e_1, \ldots, e_n \in R[x_1, \ldots, x_n]$ elemek algebrailag függetlenek $R$ felett.*

3. *Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^n$ az összes olyan $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ szám $n$-es halmaza, amelyre minden $1 \leq i \leq n$ esetén $0 \leq \alpha_i < i$, akkor*

$$\{x^\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\}$$

*egy bázisa $R[x_1, \ldots, x_n]$-nek, mint $R[e_1, \ldots, e_n]$-modulusnak.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz egy jó adag előkészületre. Elsőként idézzük fel az algebrai függetlenség fogalmát.

2.2.2. DEFINÍCIÓ *Legyenek $R$ gyűrű, $S \leq R$ részgyűrű, továbbá $H = \{h_i \mid i \in I\} \subseteq R$ tetszőleges részhalmaz. Azt mondjuk, hogy $H$* algebrailag független *vagy* transzcendens *$S$ felett, ha határozatlanok egy tetszőleges $\{t_i \mid i \in I\}$ rendszerére az*

$$\begin{array}{rcl} S[t_i \mid i \in I] & \longrightarrow & R \\ t_i & \mapsto & h_i \end{array}$$

*gyűrűhomomorfizmus injektív, s ily módon egy*

$$S[t_i \mid i \in I] \xrightarrow{\sim} S[H]$$

*izomorfizmust generál. Ellenkező esetben $H$* algebrailag függő *$S$ felett.*

2.2.3. MEGJEGYZÉS Az algebrai függetlenség fogalmával leggyakrabban talán abban a speciális helyzetben találkozhatunk, amikor $R = K$, $S = L$ testek, azaz $L/K$ egy testbővítés.

Ha a $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ testbővítést nézzük, akkor például $\left\{\sqrt{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ algebrailag függő $\mathbb{Q}$ felett, mivel a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}[t] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{2} \end{array}$$

homomorfizmus nem injektív, hiszen $t^2 - 2 \mapsto 0$.

Általánosságban is könnyen látható, hogy $\{\alpha\} \in \mathbb{R}$ pontosan akkor algebrailag független $\mathbb{Q}$ felett, ha nem létezik olyan racionális együtthatós $f$ polinom, amelyre $f(\alpha) = 0$, azaz $\alpha$ a szokásos értelemben transzcendens.

2.2.4. MEGJEGYZÉS Legyen $S \leq T \leq R$ részgyűrűk egy lánca,

$$T = S[\{t_i \mid i \in I\}] \; , \; R = T[\{r_j \mid j \in J\}] \; ,$$

ahol $t_i, r_j \in R$ tetszőleges elemek. Ha $\{r_j \mid j \in J\}$ algebrailag független $T$ felett és $\{t_i \mid i \in I\}$ algebrailag független $S$ felett, akkor $\{t_i \mid i \in I\} \cup \{r_j \mid j \in J\}$ is algebrailag független $S$ felett.

2.2.5. MEGJEGYZÉS Az $\mathcal{A}_n \subseteq \mathbb{N}^n$ elemeinek megfelelő $x^\alpha$ monomok az ún. *Artin-monomok*. Az $n$ szám kis értékeire következőképpen alakulnak:

$$\begin{array}{rcl} n = 1 & : & \mathcal{A}_1 \leftrightarrow \{1\} \\ n = 2 & : & \mathcal{A}_2 \leftrightarrow \{1, x_2\} \\ n = 3 & : & \mathcal{A}_3 \leftrightarrow \left\{1, x_3, x_3^2, x_2, x_2x_3, x_2x_3^2\right\} \; . \end{array}$$

A különböző $\mathcal{A}_n$ halmazok között gyorsan lehet rekurzív összefüggést találni:

$$\mathcal{A}_n = \{(\alpha, i) \mid \alpha \in \mathcal{A}_{n-1}, 0 \leq i \leq n-1\} \; .$$

A következőkben szükségünk lesz egy modulus szabad generátorrendszerének a fogalmára. Ugyan az alapvető algebrai fogalmakat az egész könyv során ismertnek tételezzük fel, az olvasó kényelme érdekében megadjuk a definíciót.

2.2.6. DEFINÍCIÓ *Legyen $M$ tetszőleges $R$-modulus, legyen továbbá $N = \{n_i \mid i \in I\} \subseteq M$ egy tetszőleges részhalmaz. Azt mondjuk, hogy $N$* bázisa *másképpen* szabad generátorrendszere *$M$-nek, ha minden $m \in M$ elemre pontosan egy olyan*

$$m = \sum_{i \in I} r_i m_i (r_i \in R) ,$$

*felbontás létezik, amelyre $r_i = 0$ véges sok kivételtől eltekintve. Ha az $M$ $R$-modulusnak létezik bázisa, akkor $M$-et* szabad modulus*nak hívjuk.*

2.2.7. PÉLDA $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ szabad $\mathbb{Z}$-modulus $\{(1,0),(0,1)\}$ bázissal.

2.2.8. MEGJEGYZÉS Egy szabad modulusnak sok különböző bázisa is lehet.

Nem minden modulus szabad, vagyis nem igaz, hogy minden modulusnak van bázisa. Például a $\mathbb{Z}/(2)$ $\mathbb{Z}$-modulusnak nincsen, ti. egy nemnulla szabad $\mathbb{Z}$-modulusnak végtelen sok eleme kell, hogy legyen.

Azonban ha $R = K$ test, akkor lineáris algebrából ismert, hogy minden $R$-modulusnak (azaz $K$-vektortérnek) van bázisa.

2.2.9. FELADAT *Mutassuk meg, hogy ha $M$ szabad $R$-modulus, akkor $M \simeq \oplus_{i \in I} R$ valamely $I$ indexhalmazra.*

2.2.10. MEGJEGYZÉS A szabad modulusokkal kapcsolatban természetesen felmerül a kérdés, hogy vajon egy adott szabad modulus minden bázisának ugyanakkora-e a számossága, amint azt a vektorterek esetében láttuk. Mivel az $R$ gyűrű kommutatív, így ez igaz lesz, de például nemkommutatív gyűrűk felett már nem mindig (ld. [42, 1. oldal]).

Egy $R$ kommutatív gyűrű feletti $M$ szabad modulus egy bázisának az elemszámát $M$ *rangjának* nevezzük.

2.2.11. FELADAT *Bizonyítsuk be, hogy ha $R$ olyan nem feltétlenül kommutatív, de egységelemes gyűrű, amelyre létezik $\phi : R \twoheadrightarrow K$ homomorfizmus egy $K$ testre, akkor tetszőleges $M$ $R$-modulus bármely két bázisának ugyanaz az elemszáma.*

*Igazoljuk, hogy a fenti állítás feltétele minden kommutatív gyűrűre teljesül.*

A modulusfogalom egy gyakori előfordulása a következő: legyen $S \le R$ egy részgyűrű. Ekkor gyorsan ellenőrizhető, hogy $R$ (a nagyobbik gyűrű) természetes módon, az $R$-beli szorzással, egy $S$-modulus lesz.

2.2.12. FELADAT *Igazoljuk, hogy $R$ az $s \cdot r \stackrel{def}{=} sr$ hatással egy $S$ modulus.*

2.2.13. MEGJEGYZÉS Tetszőleges $R$ gyűrű és $n$ pozitív egész szám esetén az $R[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrű definíció szerint egy szabad $R$-modulus a most definiált műveletre nézve. Az $R[x_1, \ldots, x_n]$-beli monomok egy bázist alkotnak.

2.2.14. FELADAT *Legyen $S \leq T \leq R$ részgyűrűk egy lánca, tegyük továbbá fel, hogy $R$ szabad $T$-modulus az $\{r_i \mid i \in I\}$, $T$ pedig egy szabad $S$-modulus az $\{t_j \mid j \in J\}$ bázisa. Ekkor $R$ szabad $S$-modulus, és $\{r_i t_j \mid i \in I, j \in J\}$ egy bázisa.*

A szimmetrikus polinomok alaptételének most ismertetendő bizonyítása a változók számára vett teljes indukción alapszik, alapgondolata az, hogy a

$$\{e_1, \dots, e_{n-1}, x_n\}$$

halmaz algebrailag független $R$ felett. Kicsit pontosabban, érvelésünk technikai magját következőképpen lehet tömören összefoglalni:

2.2.15. ÁLLÍTÁS *Legyenek $e'_0, \dots, e'_{n-1}$ az $R[x_1, \dots, x_{n-1}]$-beli elemi szimmetrikus polinomok. Ekkor az*

$$\{e'_1, \dots, e'_{n-1}, x_n\}, \{e_1, \dots, e_{n-1}, x_n\} \subseteq R[x_1, \dots, x_n]$$

*halmazok algebrailag függetlenek $R$ felett.*

BIZONYÍTÁS A változók számára vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk; az $n = 1$ esetben mindkét halmaz $\{x_n\}$-re egyszerűsödik, ami definíció szerint algebrailag független $R$ felett.

Legyen most $n > 1$. Mivel $R$ tetszőleges (kommutatív egységelemes) gyűrű lehet, lecserélhetjük $R[x_n]$-re. Az $e'_i$ polinomok egyike sem tartalmazza az $x_n$ változót, így az indukciós feltevésből azonnal kapjuk, hogy az $\{e'_1, \dots, e'_{n-1}\}$ halmaz algebrailag független $R[x_n]$ felett. Ebből viszont következik, hogy $\{e'_1, \dots, e'_{n-1}, x_n\}$ algebrailag független $R$ felett: tudniillik ha $f$ egy olyan $R$-beli együtthatós $n$-változós polinom lenne, amelyre

$$f(e'_1, \dots, e'_{n-1}, x_n) = 0 \in R[x_1, \dots, x_n],$$

akkor

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in R[x_n][x_1, \dots, x_n]$$

egy olyan $R[x_n]$-beli együtthatós $(n-1)$-változós polinom lenne, amelyre

$$\tilde{f}(e'_1, \dots, e'_{n-1}) = 0 \in R[x_1, \dots, x_{n-1}].$$

Ez ellentmondana annak, hogy a $\{e'_1, \dots, e'_{n-1}\}$ halmaz algebrailag független $R[x_n]$ felett.

Lássuk most be, hogy

$$\{e_1, \dots, e_{n-1}, x_n\} \subseteq R[x_1, \dots, x_n]$$

algebrailag független. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz, vagyis létezik olyan $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ polinom, amelyre $f(e_1, \dots, e_{n-1}, x_n)$ a nulla polinom. Ekkor viszont $f$ mint $R[x_n]$-beli együtthatós $(n-1)$-változós polinom azt is mutatja, hogy $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ algebrailag függő $R[x_n]$ felett[1].

[1] Az utolsó bekezdést helyettesíthetjük a 2.2.4. Megjegyzéssel is.

Mivel $x_n \in R[x_1,\dots,x_n]$ nem nullosztó, feltehetjük, hogy $f$ nem minden együtthatója osztható $x_n$-nel. Tekintsük a

$$\begin{aligned} \phi : R[x_1,\dots,x_n] &\longrightarrow R[x_1,\dots,x_{n-1}] \\ x_i &\mapsto \begin{cases} x_i & 1 \le i \le n-1 \\ 0 & i = n \end{cases} \end{aligned}$$

hozzárendelés által meghatározott (szintén $\phi$-vel jelölt) gyűrűhomomorfizmust. A feltevésünk szerint $f$ nem minden együtthatója osztható $x_n$-nel, így $\phi$ $f$-nek nem minden együtthatóját képezi a 0-ra, tehát $\phi(f)$ nem a nulla polinom. Másrészt

$$(\phi(f))(e'_1,\dots,e'_{n-1}) = \phi((f)(e_1,\dots,e_n)) = \phi(0) = 0 \,,$$

ahol az előbbiek alapján $\phi(f)$ nem a nulla polinom; így $\{e'_1,\dots,e'_{n-1}\}$ algebrailag függő $R$ felett, ami ellentmond az indukciós feltevésnek. □

BIZONYÍTÁS (2.2.1. Tétel) Amint azt korábban említettük, a változók számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be a kívánt állítást. Legyen először $n = 1$. Ekkor $e_0 = 1$, $e_1 = x_1$, és nincsen más normált elemi szimmetrikus polinom. Ezért $R[e_1] = R[x_1]$, s ily módon minden polinom szimmetrikus, másrészt minden polinom $x_1 = e_1$ polinomja.

Mostantól kezdve legyen $n > 1$, és mint fent, jelöljék $e'_0,\dots,e'_{n-1}$ az $R[x_1,\dots,x_{n-1}]$-beli elemi szimmetrikus polinomokat. Az elemi szimmetrikus polinomok definíciója alapján

$$\prod_{i=1}^{n}(t-x_i) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j t^{n-j}$$

mint $R[x_1,\dots,x_n][t]$-beli elemek. Másrészt

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n}(t-x_i) &= \left(\prod_{i=1}^{n-1}(t-x_i)\right)\cdot(t-x_n) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e'_j t^{n-1-j}\right)\cdot(t-x_n) \,, \end{aligned}$$

ahonnan a

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j t^{n-j} = (t-x_n)\cdot\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e'_j t^{n-1-j}$$

egyenlőség adódik. Mindkét oldalon $R[x_1,\dots,x_n]$-beli együtthatós polinomok állnak, így a két polinom egyenlőségéből az együtthatókra az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{cases} e_0 = e'_0 = 1 \,, \\ e_j = e'_j + e'_{j-1}x_n \,, & \text{ha } 1 \le j \le n-1 \,, \\ e_n = x_n e'_{n-1} \,. \end{cases}$$

Az imént felírt relációkból az is rögtön látszik teljes indukcióval, hogy $e'_1,\dots,e'_{n-1}$ felírhatók, mint az $e_1,\dots,e_{n-1}$ polinomok $R[x_n]$-beli együtthatós lineáris kombinációi (és megfordítva). Ennek eredményeképpen

$$R[e'_1,\dots,e'_{n-1},x_n] = R[e_1,\dots,e_{n-1},x_n] \ .$$

Az előkészületek után nekilátunk a Tétel első állítását bebizonyítani. Legyen $f \in R[x_1,\dots,x_n]$ tetszőleges szimmetrikus polinom. Ekkor $f$ minden homogén része szimmetrikus, így az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $f$ $m$-edfokú ($m>0$) homogén.

Mivel $f$ szimmetrikus, ezért szimmetrikus az első $(n-1)$ változójában is, vagyis mint $R[x_n][x_1,\dots,x_{n-1}]$-beli polinom. Az indukciós feltevés szerint egyben

$$\begin{aligned} f &\in R[x_n][e'_1,\dots,e'_{n-1}] \\ &= R[e'_1,\dots,e'_{n-1},x_n] \\ &= R[e_1,\dots,e_{n-1},x_n] \\ &= R[e_1,\dots,e_{n-1}][x_n] \ . \end{aligned}$$

Írjuk most fel $f$-et mint ez utóbbi egyváltozós polinomgyűrű eleme:

$$f = \sum_{i=0}^{m} f_i x_n^i \ ,$$

ahol $f_i \in R[e_1,\dots,e_{n-1}]$ minden $1 \le i \le m$-re.

Az $f$ polinom fenti alakjában az $f_i$ polinomok $(m-i)$-edfokú homogén polinomok az $e_1,\dots,e_{n-1}$ változókban. Ezt például a következőképpen lehet belátni: legyen

$$f_i = \sum r_\nu e_1^{\nu_1}\dots e_{n-1}^{\nu_{n-1}} \ .$$

Mint $x_1,\dots,x_{n-1}$-beli polinomok, $\deg f_i = \sum_{j=1}^{n-1} j\nu_j$, és $f_i$ erre a fokszámra nézve homogén. Ebből következik, hogy

$$(r_\nu e_1^{\nu_1}\dots e_{n-1}^{\nu_{n-1}})\cdot x_n^i$$

egy $\sum_{j=1}^{n-1} j\nu_j + i$-edfokú polinom az $x_1,\dots,x_n$ változókban. Legyen most

$$g_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sum_j j\nu_j = m-i} r_\nu e_1^{\nu_1}\dots e_{n-1}^{\nu_{n-1}} \ ,$$

ekkor

$$f = \sum_{i=0}^{m} g_i x_n^i \ .$$

Mivel a 2.2.15. Állítás szerint $\{e_1,\dots,e_{n-1},x_n\}$ algebrailag független $R$ felett, az $f=\sum_i f_i x_n^i$ előállítás egyértelmű, így $f_i = g_i$ minden $i$-re. A $g_i$ polinomok $(m-i)$-edfokú homogének voltak az $x_1,\dots,x_n$ változókban, ezért az $f_i$-k is.

Speciálisan $f_0 \in R[e_1,\dots,e_{n-1}]$ homogén $m$-edfokú polinom az $x_1,\dots,x_n$ változókban. Ha $f = f_0$, akkor készen vagyunk. Amennyiben $f \neq f_0$, akkor tekintsük az $f-f_0$

szimmetrikus polinomot, ami $m$-edfokú homogén $x_1,\ldots,x_n$-ben. A konstrukció miatt $x_n|f-f_0$, amiből viszont $f-f_0$ szimmetrikus volta miatt $e_n = x_1\ldots x_n|f-f_0$ adódik. Ekkor viszont

$$f - f_0 = e_n g \; ,$$

ahol $g$ homogén szimmetrikus polinom $x_1,\ldots,x_n$-ben, amelynek a fokszáma $< m$. Ily módon $m$-re vonatkozó teljes indukcióval készen vagyunk. Ezzel beláttuk, hogy az elemi szimmetrikus polinomok generálják a szimmetrikus polinomok gyűrűjét.

Következőként igazoljuk, hogy az elemi szimmetrikus polinomok algebrailag függetlenek $R$ felett. Láttuk, hogy $x_n$ a

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j t^{n-j} = \prod_{j=1}^{n}(t-x_j)$$

polinom nullhelye, ezért

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j x_n^{n-j} = 0 \; ,$$

átalakítva

$$(-1)^{n+1}e_n = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j e_j x_n^{n-j} = x_n^n - e_1 x_n^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}e_{n-1}x_n \; .$$

Alkalmazzuk most az általánosított maradékos osztást (2.2.16. Lemma) az $R = R[e_1,\ldots,e_{n-1}]$, $t = x_n$, $h = e_n$ esetben. Ennek eredményeképp azt kapjuk, hogy $e_n$ algebrailag független $R[e_1,\ldots,e_{n-1}]$ felett. Mivel $\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ viszont algebrailag független $R$ felett, ebből már következik, hogy $\{e_1,\ldots,e_n\}$ algebrailag független $R$ felett, ahogy ígértük.

Végül lássuk be az $R[x_1,\ldots,x_n]$-re mint $R[e_1,\ldots,e_n]$-modulusra vonatkozó állítást, megint csak a változószám szerinti indukcióval. Az $n = 1$ esetben megintcsak elég arra hivatkozni, hogy minden polinom szimmetrikus.

Ha $n > 1$, akkor az indukciós feltevés szerint

$$\mathcal{A}_{n-1} = \left\{x_1^{\nu_1}\cdots x_{n-1}^{\nu_{n-1}} \,|\, 0 \le \nu_i < i, \forall 1 \le i \le n-1\right\}$$

egy szabad generátorrendszere $R[x_1,\ldots,x_{n-1}]$-nek $R[e'_1,\ldots,e'_{n-1}]$ felett, így szintén szabad generátorrendszere a

$$R[x_1,\ldots,x_n] = R[x_n][x_1,\ldots,x_{n-1}]$$

modulusnak $R[x_n][e'_1,\ldots,e'_{n-1}]$ felett (emlékezzünk rá, hogy $R$ tetszőleges kommutatív egységelemes gyűrű lehetett, így speciálisan $R[x_n]$ is legális választás).

Láttuk korábban, hogy

$$R[x_n][e'_1,\ldots,e'_{n-1}] = R[e'_1,\ldots,e'_{n-1},x_n] = R[e_1,\ldots,e_{n-1},x_n] \; ,$$

így $\mathcal{A}_{n-1}$ egy bázisa $R[x_1,\ldots,x_n]$-nek $R[e_1,\ldots,e_{n-1},x_n]$ felett. Az általánosított maradékos osztást (2.2.16. Lemma) felhasználva

$$\mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{1, x_n, x_n^2, \ldots, x_n^{n-1}\right\}$$

bázisa $R[e_1,\dots,e_{n-1}]$-nek mint $R[e_1,\dots,e_n]$-modulusnak. Ekkor viszont a 2.2.14. Feladat miatt

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1}\mathcal{A}'$$

bázisa $R[x_1,\dots,x_n]$-nek mint $R[e_1,\dots,e_n]$-modulusnak. □

2.2.16. LEMMA *(Általánosított maradékos osztás) Legyen $R[x]$ egy egyváltozós polinomgyűrű egy tetszőleges kommutatív egységelemes gyűrű felett,*

$$f \stackrel{def}{=} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \ \in R[x]$$

*olyan polinom, amelyre $a_n \in R^\times$. Ekkor igazak az alábbiak.*

1. *$R[x]$-ben működik az $f$-fel való maradékos osztás.*
2. *Minden $g \in R[x]$ egyértelműen írható*

   $$g = g_{n-1}x^{n-1} + \dots + g_1 x + g_0$$

   *alakba, ahol $g_i \in R[f]$; továbbá a fenti $g_i$-k mindegyike egyértelműen írható*

   $$g_i = \sum_{j\geq 0} a_{ij} f^j \ , \ a_{ij} \in R$$

   *alakba.*
3. *$\{f\}$ algebrailag független $R$ felett, és $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ egy szabad generátorrendszere $R[x]$-nek mint $R[f]$-modulusnak.*

BIZONYÍTÁS Az $f$-fel való maradékos osztás működéséhez annyit kell észrevenni, hogy az euklideszi algoritmus során egy dolgot használunk fel $f$-ről, mégpedig hogy a főegyütthatója invertálható.

Legyen $g \in R[x]$ tetszőleges. Az $f$ polinommal való ismételt maradékos osztást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g &= g_1 f + r_0 \\ g_1 &= g_2 f + r_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ahol $\deg r_i < \deg f = n$. Mivel a $g_i$-k fokszáma minden lépésben csökken, az algoritmus véges sok lépésben véget ér, és egy

$$g = \sum_i r_i f^i$$

felbontást eredményez. Ez a felbontás egyértelmű, ti. ha

$$0 = \sum_i r_i f^i \ ,$$

akkor a maradékos osztás egyértelműségéből

$$0 = r_0 + f \cdot \sum_{i \geq 1} r_i f^i$$

és $r_0 = 0$, illetve $0 = \sum_{i\geq 1} r_i f^i$ adódik, amiből indukcióval minden $i$-re $r_i = 0$.

Láttuk tehát, hogy $f$ és $g$ az $r_i$-ket, és ezzel az együtthatóik is egyértelműen meghatározzák, amiből

$$g = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_j a_{ij} f^j \right) x^i = \sum_j \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} x^i \right) f^j ,$$

amint azt szerettük volna.

A harmadik állítás az $a_{ij}$ együtthatók egyértelműségének a közvetlen következménye. □

2.2.17. FELADAT *Legyen $k$ test, $\phi \in k(x_1,\dots,x_n)$ szimmetrikus racionális törtfüggvény. Ekkor $\phi \in k(e_1,\dots,e_n)$, azaz kifejezhető az elemi szimmetrikus polinomok racionális törtfüggvényeként.*

Végül megadunk egy módszert szimmetrikus polinomoknak elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként való felírására. A módszer jól áttekinthető, de a gyakorlatban gyakran nem praktikus; a szimmetrikus polinomok alaptételére adott bizonyításunk egy mellékterméke.

Legyen $f \in R[x_1,\dots,x_n]$ $n$-változós szimmetrikus polinom.

1. Vegyük az $f_1(x_1,\dots,x_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ polinomot, ez eggyel kevesebb változót tartalmaz, így az algoritmust rekurzívan futtatva rajta fel tudjuk írni, mint az $e'_1,\dots,e'_{n-1}$ $(n-1)$-változós elemi szimmetrikus polinomok egy polinomja.

2. $f_1$ fenti felírásában írjunk $e'_i$ helyére $e_i$-t minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén. Ekkor

$$e_n | f - f_1(e_1,\dots,e_{n-1}) ,$$

ezért az

$$\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{e_n}(f - f_1(e_1,\dots,e_{n-1}))$$

definíció eredménye ismét csak egy szimmetrikus polinom.

3. Alkalmazzuk az algoritmust $\tilde{f}$-re. Mivel $\deg \tilde{f} < \deg f$, véges sok lépésben véget fog érni.

2.2.18. PÉLDA Legyen $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$. Először kiszámítjuk az $f_1$ polinomot.

$$f_1(x_1,x_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1,x_2,0) = x_1^2 + x_2^2 .$$

Írjuk fel $f_1$-et mint $e'_1$ és $e'_2$ szimmetrikus polinomja. Az algoritmusunkat rekurzívan alkalmazva az

$$(f_1)_1 \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x_1,0) = x_1^2$$

egyváltozós polinomhoz jutunk, ami szimmetrikus és $(f_1)_1 = (e_1'')^2$. Ebből

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{e_2'}(f_1 - (f_1)_1(e_2')) = \frac{1}{x_1x_2}(x_1^2 + x_2^2 - (x_1+x_2)^2) = -2 \, .$$

Mivel a $-2$ az elemi szimmetrikus polinomok polinomja, $f_1 = e_1'^2 - 2e_2'$. Továbbmenve,

$$\begin{aligned}\tilde{f} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{e_3}(f(x_1,x_2,x_3) - f_1(e_1,e_2)) \\ &= \frac{1}{x_1x_2x_3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2 - ((x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3))) \\ &= 0 \, ,\end{aligned}$$

tehát

$$f = e_1^2 - 2e_2 \, .$$

2.2.19. FELADAT *Írjuk fel az* $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ *polinomot az elemi szimmetrikus polinomok egy polinomjaként.*

## 2.3. Diszkrimináns és rezultáns

A szimmetrikus polinomok egy klasszikus alkalmazása a diszkrimináns és a rezultánsok elmélete. Ebből adunk most egy rövid ízelítőt. Kiindulásként tekintsük a

$$\prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^2 \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$$

polinomot. Ez szimmetrikus az $x_1,\ldots,x_n$ változókban, így a szimmetrikus polinomok alaptétele szerint létezik egy egyértelműen meghatározott

$$\Delta_n \in \mathbb{Z}[e_1,\ldots,e_n]$$

polinom, amelyre

$$\Delta_n(e_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,e_n(x_1,\ldots,x_n)) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^2$$

mint az $x_1,\ldots,x_n$ változók polinomjai.

2.3.1. DEFINÍCIÓ *Az imént definiált* $\Delta_n \in \mathbb{Z}[e_1,\ldots,e_n]$ *polinomot a*

$$\prod_{i=1}^{n}(t - x_i) \in R[x_1,\ldots,x_n][t]$$

*polinom* diszkriminánsá*nak nevezzük. A diszkriminánst gyakran csak* $\Delta$*-val jelöljük, amennyiben az n szám a szövegkörnyezetből egyértelmű.*

2.3.2. DEFINÍCIÓ *Legyen $R$ tetszőleges gyűrű,*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in R[x] \; .$$

*Az $f$ normált polinom* diszkriminánsa

$$\Delta_f \stackrel{def}{=} \Delta_n(-a_1, a_2, \ldots, (-1)^n a_n) \; ,$$

*azaz $\Delta_n$-nek a*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n] & \longrightarrow & R \\ e_i & \mapsto & (-1)^i a_i \end{array}$$

*homomorfizmusnál vett képe.*

2.3.3. MEGJEGYZÉS A polinomok együtthatóinak általunk korábban megszokott számozásától azért térünk el, hogy esetünkben $a_1$ felelhessen meg az $e_1$ elemi szimmetrikus polinomnak, és így tovább.

2.3.4. MEGJEGYZÉS A szimmetrikus polinomok alaptétele szerint $\{e_1, \ldots, e_n\}$ algebrailag független halmaz $\mathbb{Z}$ felett, így $\mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n]$ izomorf egy $\mathbb{Z}$ feletti $n$-változós polinomgyűrűvel.

2.3.5. MEGJEGYZÉS Ha $n = 0$, vagyis $f$ egy konstans polinom, akkor $\Delta_f = 1$, mivel egy üres szorzat értéke 1.

2.3.6. ÁLLÍTÁS *Legyen $f = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in R[x]$ normált polinom, $R \subseteq S$ olyan gyűrűbővítés, amelyben $f$ lineáris faktorokra esik szét, azaz*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \; , \; \forall 1 \le i \le n \; : \; \alpha_i \in S \; .$$

*Ekkor*

$$\Delta_f = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \; .$$

BIZONYÍTÁS Kiindulási pontnak vegyük a

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & S \\ x_i & \mapsto & \alpha_i \end{array}$$

homomorfizmust, amely a $\mathbb{Z} \to S$ kanonikus homomorfizmus egyértelműen meghatározott kiterjesztése. Ekkor

$$\phi\left( \prod_{i=1}^{n} (t - x_i) \right) = f \; ,$$

ahonnan a gyökök és együtthatók közti összefüggésből

$$\phi(e_i) = (-1)^i a_i \; ,$$

s így

$$\phi(\Delta) = \Delta_f$$

következik. Ez alapján

$$\Delta_f = \phi\Big(\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)^2\Big) = \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i - \alpha_j)^2 .$$

□

2.3.7. MEGJEGYZÉS Legyen most $R = K$ test, $f \in K[x]$ mint fent. Ekkor $\Delta_f = 0$ pontosan akkor, ha $f$-nek van többszörös gyöke $K$ egy $\overline{K}$ algebrai lezártjában. Ismert, hogy ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy $f$-nek és $f$ deriváltjának van közös nullhelye.

2.3.8. PÉLDA (Másodfokú polinomok diszkriminánsa) Legyen $R$ tetszőleges gyűrű, és tekintsük az

$$f(x) = x^2 + px + q \in R[x]$$

normált polinomot. Ebben a példában kiszámoljuk a $\Delta_f$ diszkriminánst a $p$,$q$ együtthatók függvényében. Vegyünk egy $R \subseteq S$ gyűrűbővítést, amelyben $f$ lineáris faktorokra bomlik, legyen

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ ,\ \alpha_1,\alpha_2 \in S\ .$$

Célunk

$$\Delta_f = (\alpha_1-\alpha_2)^2 \in R$$

meghatározása. A szimmetrikus polinomok alaptétele alapján $e_1 = x_1 + x_2$ és $e_2 = x_1x_2$ generálják a kétváltozós szimmetrikus polinomok gyűrűjét, speciálisan minden kétváltozós szimmetrikus polinom előáll mint $e_1$ és $e_2$ $R$-beli együttható polinomja. A gyökök és együtthatók közti összefüggésekből

$$\alpha_1+\alpha_2 = -p\ ,\ \alpha_1\alpha_2 = q\ ,$$

ily módon $\alpha_1$ és $\alpha_2$ minden szimmetrikus polinomja előáll mint $p$ és $q$ függvénye, ily módon $(\alpha_1-\alpha_2)^2$ is. A megoldás kulcsa az, hogy fel kell írnunk ez utóbbi kifejezést $\alpha_1+\alpha_2$ és $\alpha_1\alpha_2$ polinomjaként:

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 - 4(\alpha_1\alpha_2)\ .$$

Ebből rögtön következik, hogy

$$\Delta_f = (\alpha_1-\alpha_2)^2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 - 4(\alpha_1\alpha_2) = p^2 - 4q\ .$$

2.3.9. FELADAT *(Harmadfokú polinomok diszkriminánsa). Legyen $R$ tetszőleges gyűrű,*

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r \in R[x]$$

*egy harmadfokú polinom. Az előző példa módszerével igazoljuk, hogy*

$$\Delta_f = p^2q^2 + 18pqr - 4p^3r - 4q^3 - 27r^2\ .$$

2.3.10. FELADAT *Igazoljuk, hogy az*

$$f(x) = x^n + px + q \in R[x]$$

*polinom diszkriminánsa*

$$\Delta_f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot ((1-n)^{n-1}p^n + n^n q^{n-1}) .$$

2.3.11. FELADAT *Mutassuk meg, hogy ha* $f(x) \in R[x]$ 1-*főegyütthatós polinom,* $a \in R$*, akkor*

$$\Delta_{f(x)} = \Delta_{f(x+a)} .$$

Polinomok diszkriminánsa egy általánosabb algebrai konstrukciónak, az ún. rezultánsnak a speciális esete. Teljes általánosságban igen bonyolult a rezultánsok elmélete és részben ma is aktív kutatási terület. Emberléptékű bevezetések találhatók például a [7],[6], [3] könyvekben. Lényegesen nehezebb olvasmány a [15] monográfia, cserébe viszont meglehetősen jó képet ad a területről.

A legegyszerűbb eset az alábbi.

2.3.12. DEFINÍCIÓ *Legyen R egy tetszőleges (kommutatív egységelemes) gyűrű. Egy* $f \in R[x]$ *polinomot* formálisan $n$-edfokú*nak nevezünk, ha* $\deg f \leq n$*. A formálisan* $m$*-edfokú* $f$ *és a formálisan* $n$*-edfokú* $g$ $R$*-beli együtthatós polinomok* rezultánsát *az alábbi módon definiáljuk: amennyiben*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ és} \\ g(x) &= b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 , \end{aligned}$$

*akkor*

$$\operatorname{res}_x(f,g) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & . & . & a_0 & & & & \\ & a_m & a_{m-1} & . & . & a_0 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & a_m & a_{m-1} & . & . & a_0 & \\ & & & & & a_m & a_{m-1} & . & . & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & . & . & b_0 & & & & \\ & b_n & b_{n-1} & . & . & b_0 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & b_n & b_{n-1} & . & . & b_0 & \\ & & & & & b_n & b_{n-1} & . & . & b_0 \end{vmatrix} .$$

*A nem megnevezett elemek vagy pontok által jelölt helyeken nullák állnak.*

2.3.13. PÉLDA Legyenek $x$,$y$ határozatlanok, és tekintsük az $R[y]$ gyűrűt, továbbá az

$$f(x) = xy - 2 \in R[y][x] \text{ és } g(x) = x^2 + y^2 - 3 \in R[y][x]$$

polinomokat. Ekkor

$$\operatorname{res}_x(f,g) = \begin{vmatrix} y & -2 & 0 \\ 0 & y & -2 \\ 1 & 0 & y^2-3 \end{vmatrix} = y^4 - 3y^2 + 2y + 4 \,.$$

Amint azt sejteni lehet, ennek a példának sok köze van a geometriához, jelen esetben az $xy = 2$ egyenletű hiperbola és az $x^2 + y^2 = 3$ egyenletű kör metszéspontjaihoz. A geometriai kapcsolatról bővebben olvashatunk a [6] tankönyv 3. fejezetében.

2.3.14. FELADAT *A rezultánsok definíciója segítségével igazoljuk, hogy ha $f(x) = x^3 + px + q$, akkor*

$$\operatorname{res}(f, f') = -4p^3 - 27q^2 \,.$$

2.3.15. FELADAT *Legyen $f = x^4 + px^2 + qx + r$. Ellenőrizzük, hogy*

$$\operatorname{res}(f, f') = 144pq^2r - 128p^2r^2 - 4p^3q^2 + 16p^4r - 27q^4 + 256r^3 \,.$$

2.3.16. FELADAT *Igazoljuk az alábbi azonosságot:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{res}_x(a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &\qquad = (a_2b_0 - a_0b_2)^2 + (a_1b_0 - a_0b_1)(a_1b_2 - a_2b_0) \,. \end{aligned}$$

A rezultánsok elemi tulajdonságai determinánsokkal való egyszerű számolásokon múlnak. Mivel ezek a determinánsokra vonatkozó szabályok hagyományosan testekre vannak bebizonyítva, az alábbi lemma hathatós technikai segítséget nyújt.

2.3.17. LEMMA *A determinánsok manipulálására vonatkozó szabályok tetszőleges $R$ gyűrű felett érvényben maradnak.*

BIZONYÍTÁS Egy tetszőleges determinánsok közti bizonyítandó $R$ feletti azonosságban legyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ az *összes* előforduló együttható. Tekintsük az $s$-változós $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_s)$ racionális függvénytestet, efölött a kívánt azonosság teljesül. Ekkor viszont szintén teljesül a

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s] \subseteq \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_s)$$

részgyűrűben is, amiből a

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s] &\longrightarrow R \\ x_i &\mapsto \alpha_i \end{aligned}$$

homomorfizmus segítségével kapjuk a bizonyítandó állítást $R$ felett. $\square$

2.3.18. ÁLLÍTÁS *Tetszőleges $R$ gyűrű esetén igazak az alábbiak.*

1. *Ha $r, s \in R$, akkor* $\operatorname{res}(rf, sg) = r^n s^m \cdot \operatorname{res}(f, g)$.

2. $\mathrm{res}(g,f) = (-1)^{mn}\,\mathrm{res}(f,g)$.

3. *Legyen* $\phi : R \to S$ *egy gyűrűhomomorfizmus, és jelölje* $\phi \circ f$*, illetve* $\phi \circ g$ *az* $f$ *és* $g$ *polinomok* $\phi$ *szerinti képét* $S[x]$*-ben. Ekkor*

$$\mathrm{res}(\phi \circ f, \phi \circ g) = \phi \circ \mathrm{res}(f,g)\ .$$

BIZONYÍTÁS Alkalmazzuk a determinánsokkal való számolás elemi szabályait (konstans kiemelése egy sorból vagy oszlopból, sorok cseréje, stb). □

Az alábbiakban egyrészt igyekszünk megérteni, hogy az imént nagyméretű determinánsokkal definiált rezultánsok fogalmához hogyan juthatunk el egy konceptuálisabb úton, illetve ezt felhasználva megismerkedünk a rezultánsok további érdekes tulajdonságaival.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $R = K$ test. Két $f, g \in K[x]$ polinom rezultánsa alapvetően azt mutatja meg, hogy van-e $f$-nek és $g$-nek közös faktora ($K$ felett). Az első lényeges észrevétel az alábbi.

2.3.19. ÁLLÍTÁS *Legyenek* $f, g \in K[x]$ *nemkonstans polinomok,* $\deg f = n$*,* $\deg g = m$*. Ekkor* $f$*-nek és* $g$*-nek pontosan akkor van közös faktora, ha léteznek olyan* $h, k \in K[x]$ *polinomok, amelyekre*

1. $hf + kg = 0$
2. $\deg h \le m-1$, $\deg k \le n-1$
3. *$h$ és $k$ közül legalább az egyik* $\neq 0$.

BIZONYÍTÁS Tegyük fel először, hogy $f$-nek és $g$-nek van közös faktora, legyen ez $l \in K[x]$, továbbá jelölje

$$f = f_1 l\ ,\ g = g_1 l\ .$$

Mivel $l$ legalább elsőfokú polinom,

$$\deg f_1 \le n-1 \ \text{ és } \deg g_1 \le m-1\ .$$

Ekkor a $h \overset{\mathrm{def}}{=} g_1$ és $k \overset{\mathrm{def}}{=} -f_1$ választással

$$hf + gk = g_1 f + (-f_1) g = g_1 f_1 l - f_1 g_1 l = 0$$

miatt készen vagyunk.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy a $h, k \in K[x]$ polinomokra teljesül az állítás három kikötése. Az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy $h \neq 0$. Ha $f$-nek és $g$-nek nincsen közös faktora, akkor $(f,g) = (1) = K[x]$, így léteznek olyan $a, b \in K[x]$ polinomok, amelyekre

$$af + bg = 1\ .$$

Ekkor

$$h = 1 \cdot h = (af + bg)h = ahf + bhg = a(-kg) + bhg = (-ak + bh)g\ ,$$

amiből $\deg h \geq \deg g = m$ következik, ami ellentmondás. □

A most tárgyalt elemi lépés lényege, hogy a közös faktor létezésének kérdését egy lineáris algebrai problémára vezeti vissza. Tekintsük tudniillik a

$$hf + kg = 0 \in K[x]$$

egyenlőséget, és vizsgáljuk meg, hogy mit jelent a szereplő polinomok együtthatóira nézve. Legyen

$$h(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1}$$

és

$$k(x) = \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} ,$$

ahol is a felmerülő $n+m$ együtthatót tekintsük ismeretleneknek, mégpedig abban az $(n+m)$-ismeretlenes egyenletrendszerben, amelyet a polinomok közti $hf + kg = 0$ egyenlet ad meg. Ahhoz, hogy az egyenletrendszert konkrétan leírjuk, a következőképpen fogunk eljárni. Legyen

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 , \end{aligned}$$

és $\deg f = n$, $\deg g = m$ miatt $a_n, b_m \neq 0$. Helyettesítsük be az $f, g, h, k$-ra kapott formulákat a $hf + kg = 0$ egyenletbe, és számítsuk ki $x$ potenciálisan előforduló hatványainak az együtthatóit:

$$\begin{aligned} x^{n+m-1} \text{ együtthatója: } a_n\alpha_0 + b_m\beta_0 &= 0 \\ x^{n+m-2} \text{ együtthatója: } a_{n-1}\alpha_0 + a_n\alpha_1 + b_{m-1}\beta_0 + b_m\beta_0 &= 0 \\ \vdots \quad &\vdots \\ 1 \text{ együtthatója: } a_0\alpha_{m-1} + b_0\beta_{n-1} &= 0 . \end{aligned}$$

Az iménti rendszer $m+n$ egyenletből áll, $l+m$ ismeretlent tartalmaz, így pontosan akkor lesz az azonosan nullától különböző megoldása, ha az együtthatókból álló mátrix determinánsa nulla. Az adott feladatban fellépő együtthatómátrix az $f$ és $g$ polinomok ún. *Sylvester-mátrix*a, ami láthatóan megegyezik az $f$ és $g$ rezultánsának a definíciójában szereplő mátrixszal. Ennek determinánsa $\mathrm{res}(f,g)$. Eljutottunk tehát az alábbi állításhoz.

2.3.20. ÁLLÍTÁS *Ha $f, g \in K[x]$ nemkonstans polinomok, akkor $f$-nek és $g$-nek pontosan akkor van közös faktora, ha* $\mathrm{res}(f,g) = 0$.

A rezultánsok legfontosabb tulajdonságai közül még párat tárgyalunk alaposan az $R = K$ esetben.

2.3.21. TÉTEL *Legyenek $f, g \in K[x]$ nemkonstans polinomok. Ekkor*

1. $\mathrm{res}(f,g) \in K$ *az $f$ és $g$ polinomok egy egészegyütthatós polinomja;*

2. *léteznek $h, k \in K[x]$ polinomok (amelyeknek az együtthatói ismét csak $f$ és $g$ együtthatóinak egészegyütthatós polinomjai), amelyekre*

$$hf + kg = \mathrm{res}(f,g) .$$

2.3.22. MEGJEGYZÉS A Tétel állítása illetve a bizonyítás némi változtatással működik tetszőleges kommutatív gyűrű esetén.

BIZONYÍTÁS Az első állítás a determináns definíciójának közvetlen következménye (arra a definícióra gondolunk, ahol a determinánst mint egy mátrix elemeinek a függvényét adjuk meg).

A második állítás bizonyítása hosszadalmasabb lesz, a módszer a fentiekben alkalmazott lineáris algebrára történő redukció lesz. Az mindenesetre azonnal látszik, hogy az állítás igaz a $\operatorname{res}(f,g)=0$ esetben (legyen $h=k=0$, így az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\operatorname{res}(f,g)\neq 0\in K[x]$).

Az $f$ és $g$ nemkonstans polinomok felírhatók

$$\begin{aligned} f(x) &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \\ g(x) &= b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0 \end{aligned}$$

alakban, ahol $a_n,b_m\neq 0$. Legyen továbbá

$$\begin{aligned} h_1(x) &= c_{m-1}x^{m-1}+c_{m-2}x^{m-2}+\cdots+c_0\ , \\ k_1(x) &= d_{n-1}x^{n-1}+d_{n-2}x^{n-2}+\cdots+d_0 \\ &, \end{aligned}$$

ahol a $c_i$,$d_j$ együtthatókat $K$ ismeretlen elemeinek tekintjük.

Helyettesítsük be az iméntieket a

$$h_1f+k_1g = 1\in K[x]$$

egyenletbe. Ekkor az alábbi $K$-lineáris egyenletrendszert kapjuk (ahol $c_i$,$d_j$ az ismeretlenek és $a_i,b_j$ az együtthatók):

$$\begin{array}{lrcc} x^{n+m-1}\text{ együtthatója:} & a_nc_{m-1}+b_md_{n-1} &=& 0 \\ x^{n+m-2}\text{ együtthatója:} & a_{n-1}c_{m-1}+a_nc_{m-2}+b_{m-1}d_{n-1}+b_md_{n-2} &=& 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1\text{ együtthatója:} & a_0c_0+b_0d_0 &=& 1 \end{array}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy az egyenletrendszer mátrixa $\operatorname{res}(f,g)$, és $\operatorname{res}(f,g)\neq 0$ ekvivalens a rendszer egyértelmű $K$-beli megoldásának létezésével.

Hátravan még annak igazolása, hogy az állításbeli $h$ és $k$ együtthatói $f$ és $g$ együtthatóinak egészegyütthatós polinomjai. Ehhez az eddigi gondolatokat a Cramer-szabállyal fogjuk ötvözni. Eszerint (a konkrét formulát mellőzve) minden $c_i$ és $d_j$ előáll

$$\frac{f\text{ és }g\text{ együtthatóinak egészegyütthatós polinomja}}{\operatorname{res}_x(f,g)}$$

alakban, másképpen

$$h_1=\frac{h}{\operatorname{res}(f,g)}\ ,\ k_1=\frac{k}{\operatorname{res}(f,g)}\ ,$$

ahol $h, k \in K[x]$ és $h_1, k_1$ együtthatói $f$ és $g$ együtthatóinak egészegyütthatós polinomjai. Láttuk, hogy

$$h_1 f + k_1 g = 1 ,$$

amiből

$$hf + kg = \mathrm{res}(f, g)$$

következik. Ezzel az állítást beláttuk. □

2.3.23. TÉTEL *Legyen $f \in K[x]$ $n$-edfokú 1-főegyütthatós polinom, és tekintsük az*

$$M \stackrel{def}{=} K[x]/(f)$$

*hányadosgyűrűt mint $K$-algebrát a*

$$\begin{aligned} \pi : K[x] &\longrightarrow M = K[x]/(f) \\ g &\mapsto \overline{g} \stackrel{def}{=} g + (f) \end{aligned}$$

*természetes homomorfizmus segítségével. Ekkor*

1. *az $\overline{x}^{n-1}, \overline{x}^{n-2}, \ldots, \overline{x}, \overline{1}$ elemek az $M$ modulus egy $K$-bázisát alkotják.*
2. *Ha $g \in K[x]$ egy legfeljebb $m$-edfokú polinom, akkor az $\mathrm{res}_x(f, g)$ rezultánsra*

$$\mathrm{res}_x(f, g) = \mathrm{Norm}_{M/R}(\overline{g}) .$$

2.3.24. MEGJEGYZÉS Némi módosítással a Tétel érvényben marad kommutatív gyűrűk esetén is (ld. [3, 4.4. Satz 7.]).

2.3.25. MEGJEGYZÉS Legyen $R$ tetszőleges kommutatív gyűrű, $M$ egy végesen generált szabad $R$-modulus, $r \in R$. Az $r$ elem $\mathrm{Norm}_{M/R}$-rel jelölt normáját az $M$ moduluson az alábbi módon definiáljuk. Az $r$-rel való szorzás egy

$$\begin{aligned} \mu_r : M &\longrightarrow M \\ m &\mapsto r \cdot m \end{aligned}$$

$R$-lineáris leképezést határoz meg $M$-en. Legyen

$$\mathrm{Norm}_{M/R}(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det \mu_r .$$

2.3.26. PÉLDA Vegyük az $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ testbővítést; ekkor tekinthetjük a komplex számok testét, mint egy kétdimenziós $\mathbb{R}$-vektorteret. Határozzuk meg először egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szám normáját erre a $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-moduluson. Tekintsük az $\{1, i\}$ bázist, ebben felírva az $\alpha$-val való szorzást mint $\mathbb{R}$-lineáris transzformációt az

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

mátrixhoz jutunk. Ebből rögtön adódik, hogy

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\alpha) = \det A = \alpha^2 .$$

2.3.27. FELADAT *Legyen* $f(x) = x^3 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $g(x) = x^2 + 1$. *Mennyi* $\mathrm{Norm}_{(\mathbb{Q}[x]/(f))/\mathbb{Q}[x]}(g)$*?*

BIZONYÍTÁS (2.3.23. Tétel) Egy rövid bizonyítást találhatunk a [3] könyv 4.4. fejezetében. □

2.3.28. FELADAT *Legyenek* $f,g \in K[x]$ *polinomok,* $K \subseteq L$ *egy testbővítés, amelyben mindkét polinom felbomlik lineáris faktorokra. Tegyük fel, hogy*

$$f(x) = a\cdot\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)\ ,\ g(x) = b\cdot\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)\ ,$$

*ahol* $a,b \in K$*, és* $\alpha_i,\beta_j \in L$ *minden* $1 \leq i \leq n$ *és* $1 \leq j \leq m$ *esetén. Mutassuk meg, hogy*

$$\mathrm{res}_x(f,g) = a^m\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i) = a^m b^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)\ .$$

2.3.29. KÖVETKEZMÉNY *Az eddigi jelöléseinkkel*

$$\Delta_f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathrm{res}_x(f,f')\ .$$

2.3.30. FELADAT *Mutassuk meg, hogy tetszőleges* $f,g \in K[x]$ 1-*főegyütthatós polinomok esetén*

$$\Delta_{fg} = \Delta_f\cdot\Delta_g\cdot\mathrm{res}_x(f,g)^2\ .$$

## 2.4. Szimmetrikus függvények

Szimmetrikus polinomok esetén sok szempontból lényegtelen, hogy pontosan hány változósak, mivel a szimmetrikus polinomok szimmetrikusan specializálódnak, azaz ha $f$ egy $m$-változós szimmetrikus polinom, $l < m$, akkor

$$f(x_1,\ldots,x_l,0,\ldots,0) = \tilde{f}(x_1,\ldots,x_l)$$

egy szimmetrikus $l$-változós polinomot eredményez.

Emellett időnként fontos, hogy a változók száma kellően nagy legyen, például Schur-polinomok esetén ahol $s_\lambda = 0$ ha a változók száma kisebb $\lambda$ sorainak a számánál. Ilyen esetekben kényelmetlen, ha meg kell adni a változók számát.

E problémák megoldását orvosolja a szimmetrikus függvények fogalmának bevezetése.

2.4.1. DEFINÍCIÓ *Egy* $f$ $n$-edfokú szimmetrikus függvény *$n$-edfokú szimmetrikus polinomok egy olyan*

$$\{f_m \in \Lambda_n[m] |\ m \geq 1\}$$

*halmaza, amelyre tetszőleges $l < m$ esetén*

$$f_m(x_1,\dots,x_l,0,\dots,0) = f_l(x_1,\dots,x_l) .$$

Az $n$-edfokú homogén szimmetrikus függvények $\mathbb{Z}$-modulusának jelölése $\Lambda_n$ (ld. 2.1.5. Definíció). Ezek segítségével definiálhatjuk a szimmetrikus függvények fokszámozott gyűrűjét:

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda_n .$$

2.4.2. MEGJEGYZÉS A szimmetrikus függvények körében a gyűrűműveleteket a reprezentánsaik segítségével definiáljuk. Ha

$$f = \{f_m \,|\, m \geq 1\} \in \Lambda_n \text{ , illetve } g = \{g_m \,|\, m \geq 1\} \in \Lambda_{n'}$$

szimmetrikus függvények, akkor

$$f+g \stackrel{\text{def}}{=} \{f_m + g_m \,|\, m \geq 1\}$$

és

$$f \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} \{f_m \cdot g_m \,|\, m \geq 1\} .$$

Mivel a specializáció felcserélhető a polinomok körében végzett műveletekkel, az imént bevezetett műveletek jóldefiniáltak.

2.4.3. FELADAT *Igazoljuk, hogy $\Lambda$ valóban fokszámozott gyűrű a most ismertetett műveletekre nézve.*

2.4.4. MEGJEGYZÉS A szimmetrikus függvények gyűrűjét másképpen az alábbi módon írhatjuk le. Tetszőleges $l \geq m$ pozitív egész számok esetén legyen

$$\pi_{ml} : \Lambda[m] \longrightarrow \Lambda[l]$$

az a gyűrűhomomorfizmus, amit az utolsó $m-l$ változó kinullázásával kapunk. Gyorsan ellenőrizhető, hogy

$$\{\Lambda[m] \,|\, m \geq 1\} \text{ , } \{\pi_{ml} \,|\, m,l \geq 1\}$$

egy úgynevezett inverz rendszer (ld. [26],[37]), ami a természetes számokkal van indexelve. A szimmetrikus függvények gyűrűje ennek az inverz rendszernek az inverz limesze, vagyis

$$\Lambda = \lim_{\substack{\leftarrow \\ m}} \Lambda[m] .$$

A nevezetes szimmetrikus polinomoknak megfelelő szimmetrikus függvényeket azonos módon jelöljük; mivel rögzített változószám esetén visszakapjuk az adott szimmetrikus függvényt, ez remélhetőleg nem fog kavarodást okozni.

Fontos észrevétel, hogy a szimmetrikus polinomokra bizonyított összes eddigi azonosság érvényben marad, hiszen kompatibilisek a változók kinullázásával. Fontos példaként teljesül a Littlewood–Richardson-szabály megfelelője szimmetrikus függvényekre:

2.4.5. KÖVETKEZMÉNY *Az eddigi jelöléseinkkel*

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu \ .$$

2.4.6. ÁLLÍTÁS *Tetszőleges $\lambda$ partíció esetén*

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu \ .$$

BIZONYÍTÁS Mivel az állítás kompatibilis a változók kinullázásával, elég a szimmetrikus polinomokra vonatkozó megfelelő azonosságot belátni. Legyen tehát $\lambda$ tetszőleges partíció, $m$ pozitív egész szám, ekkor a bizonyítandó állítás

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu(x_1,\ldots,x_m) \ .$$

Idézzük fel a Schur-polinomok definícióját:

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{T \text{ tabló } D\text{-n}} x^T \ ,$$

ahol

$$x^T = \prod_{i=1}^m x_i^{\text{az } i \text{ elem előfordulásainak a száma } T\text{-ben}}$$

Mivel a $K_{\lambda\mu}$ Kostka-szám pontosan a $\lambda$ alakú és $\mu$ tartalmú Young-tablók számát adja meg,

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\widetilde{\mu}} K_{\lambda\mu} x_1^{\widetilde{\mu}_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\widetilde{\mu}_m} \ ,$$

ahol az összegzés az $n = |\lambda|$ szám összes természetes számokra történő, ezek sorrendjét is tekintetbe vevő $\widetilde{\mu}$ felbontására történik; továbbá $\mu$ a fenti típusú $\widetilde{\mu}$ felbontásnak megfelelő partíció[2].

Vegyük észre, hogy egy adott $\mu$ partícióra

$$\sum_{\text{a } \widetilde{\mu}\text{-höz tartozó partíció } \mu} x_1^{\widetilde{\mu}_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\widetilde{\mu}_m} = m_\mu \ ,$$

így

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu \ ,$$

ahol most az összegzés az $n$ szám összes partícióján fut végig. Tekintetbe véve, hogy az 1.2.22. Állítás szerint

$$K_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = \mu \\ 0 & \text{ha } \lambda \ntrianglerighteq \mu, \end{cases}$$

[2]Tekintsünk egy konkrét példát: legyen $n = |\lambda| = 3$, $m = 3$. Ekkor $\widetilde{\mu} = 1+2$ és $\widetilde{\mu}' = 2+1$ két különböző felbontás, azonban a hozzájuk tartozó $\mu$ partíció megegyezik, mindkét esetben $(2,1)$.

rögtön adódik, hogy

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_m) = \sum_{\mu\unlhd\lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu(x_1,\dots,x_m) ,$$

ahogy kívántuk. □

Elkezdhetünk gyanakodni, hogy a Kostka-számoknak alapvető szerepe van a szimmetrikus függvények elméletében, hiszen láthatóan bizonyos nevezetes függvényosztályok közti átmenetmátrixok elemeiként funkcionálnak. Hogy ez mennyire így van, azt hamarosan látni fogjuk, többek közt a következő eredményben.

2.4.7. ÁLLÍTÁS *Az eddigi jelölésekkel*

$$h_\lambda = \sum_{\mu\unlhd\lambda} K_{\lambda\mu} s_\mu .$$

BIZONYÍTÁS A bizonyítandó állítás ismét csak kompatibilis a specializációval, ily módon a kívánt azonosságot ismét elegendő $m$-változós szimmetrikus polinomokra igazolni.

Egy, a Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetésen alapuló érvelést fogunk használni, ehhez először is írjuk át a $h_\lambda(x_1,\dots,x_m)$ általánosított teljes szimmetrikus polinomot alkalmas alakba:

$$h_\lambda(x) = h_{\lambda_1}(x)\cdot\ldots\cdot h_{\lambda_m}(x) = \sum_A \prod_{j=1}^n x_j^{a_{1j}+\ldots+a_{nj}} ,$$

ahol az összegzés az összes olyan $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(\mathbb{N})$ mátrixon fut végig, amelyre $\sum_{k=1}^n a_{lk}=\lambda_l$ minden $1\le l\le m$-re.

A Robinson-Schensted-Knuth megfeleltetést használva adódik, hogy

$$h_\lambda(x) = \sum_S x^\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda} S_\mu ;$$

az első összegzés az összes $\mu$ alakú és $\lambda$ tartalmú tablóra történik. Felhasználva, hogy

$$K_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda=\mu \\ 0 & \text{ha } \lambda \ntrianglerighteq \mu, \end{cases}$$

kapjuk, hogy a második összegzés valójában csak a $\mu\unlhd\lambda$ partíciókon fut végig. □

2.4.8. MEGJEGYZÉS Az Állítást könnyen beláthatjuk az 1.2.14. Lemma alapján is.

Az alfejezet egyik fő mondanivalója az alábbi eredmény, amely számos $\mathbb{Z}$-bázist szolgáltat a rögzített fokszámú szimmetrikus függvények $\mathbb{Z}$-modulusának.

2.4.9. TÉTEL *Legyen $n$ tetszőleges pozitív egész szám. Az alábbi halmazok mind bázisát alkotják az $n$-edfokú homogén szimmetrikus függvények $\mathbb{Z}$-modulusának, $\Lambda_n$-nek:*

1. $\{m_\lambda \,|\, |\lambda|=n\}$
2. $\{e_\lambda \,|\, |\lambda|=n\}$

3. $\{h_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$

4. $\{s_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$ .

*Amennyiben racionális számokat is megengedünk együtthatóként, akkor*

$$\{p_\lambda : \ |\lambda| = n\}$$

*bázisa a $\mathbb{Q}$-együtthatós n-edfokú szimmetrikus függvények vektorterének.*

2.4.10. MEGJEGYZÉS A fenti tételt is gyakran hívják a szimmetrikus függvények alaptételének.

BIZONYÍTÁS Az $m_\lambda$ monomiális szimmetrikus polinomok függetlenek $\mathbb{Z}$ felett, hiszen $\lambda \neq \lambda'$ esetén az $m_\lambda$, illetve $m'_\lambda$ polinomokban szereplő monomok halmaza diszjunkt. Másrészt minden $n$-edfokú homogén polinom $n$-edfokú monomok lineáris kombinációja, speciálisan minden $n$-edfokú homogén szimmetrikus polinom felírható az $m_\lambda$ polinomk $\mathbb{Z}$-lineáris kombinációjaként. Ezzel beláttuk, hogy a

$$\{m_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$$

halmaz valóban $\Lambda_n$ egy $\mathbb{Z}$-bázisa.

Ugyan korábban a 2.2.1. Tétel részeként már beláttuk, hogy az elemi szimmetrikus polinomok a szimmetrikus polinomok egy bázisát alkotják, most adunk egy másik bizonyítást, ami az alfejezet során használt eszközöket alkalmazza. Írjuk fel az $e_\lambda$ $n$-edfokú általánosított elemi szimmetrikus függvényeket a $\{m_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$ bázisban; jelölje

$$C \stackrel{\text{def}}{=} (c_{\lambda\mu})$$

az együtthatómátrixot. Amennyiben sikerül belátni, hogy $C$ a $\lambda$ partíciók egy alkalmas rendezésére olyan háromszögmátrix, amelynek a főátlóján csupa $\pm 1$ áll, akkor a Cramer-szabály miatt $C$ invertálható, s így

$$\{e_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$$

szintén az $n$-edfokú homogén szimmetrikus függvények egy $\mathbb{Z}$-bázisa lesz. Ekvivalens módon az is elegendő, ha a $\overline{\lambda}$ partíciókat rendezzük a célnak megfelelően. A 2.4.11. Lemma megoldja ezt a feladatot, tehát az adott fokszámú általánosított elemi szimmetrikus polinomok is $\mathbb{Z}$-bázist alkotnak.

Következőként belátjuk ugyanezt a

$$\{h_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$$

halmazra. Mivel

$$|\{h_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}| = |\{e_\nu \,|\, |\nu| = n\}| ,$$

így elég azt belátni, hogy a $h_\lambda$-k generátumában benne vannak az $e_\mu$-k, és fordítva. Ehhez elegendő megmutatni, hogy hogy minden $e_n$ felírható a $h_k$-k egy polinomjaként és fordítva. Ez utóbbi könnyen adódik $n$-re vonatkozó teljes indukcióval a

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$$

összefüggésből (2.1.18. Állítás).

Ugyanezen elv alapján könnyen látható, hogy az adott fokú Schur-polinomok is $\mathbb{Z}$-bázist alkotnak; ti. a 2.4.6. Állítás szerint

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu ,$$

ezért minden $s_\lambda$ benne van az $m_\mu$-k generátumában, s így egyúttal a $h_\mu$-k generátumában is. Másrészt a 2.4.7. Állításban beláttuk, hogy

$$h_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu\lambda} s_\mu ,$$

ezért a $h_\lambda$-k is benne vannak az $s_\mu$-k generátumában. Tehát a két generátum megegyezik, így

$$\{s_\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$$

$\mathbb{Z}$-bázis.

Végül ellenőrizzük, hogy a Newton-féle hatványösszegek $\mathbb{Q}$-bázist alkotnak. Ezt onnan lehet egyszerűen látni, hogy az

$$nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}$$

összefüggésből $n$ szerinti indukcióval adódik, hogy a $p_\lambda$-k és a $h_\lambda$-k generátuma megegyezik. □

2.4.11. LEMMA *A fenti tétel jelöléseivel*

$$e_{\overline{\lambda}} = m_\lambda + \sum_\nu c_{\lambda\nu} m_\nu ,$$

*ahol $c_{\lambda\nu} \in \mathbb{N}$ és az összegzés azokon a $\nu$ partíciókon fut végig, amelyek kisebbek $\lambda$-nál a lexikografikus rendezésben (ahol $x_1 < x_2 < \dots$).*

BIZONYÍTÁS Szokás szerint legyen

$$\overline{\lambda} = (\mu_1, \dots, \mu_k) .$$

Definíció szerint

$$e_{\overline{\lambda}} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdot \dots \cdot e_k^{m_k} ,$$

ahol

$$m_i = m_i(\overline{\lambda}) = \lambda_i - \lambda_{i+1} ,$$

és $m_i(\overline{\lambda})$ a $\overline{\lambda}$ partíció $i$-vel megegyező elemeinek a száma. Ha kifejtjük a szorzatot, monomok egy bizonyos összegét kapjuk; ugyanezeket a monomokat a lexikografikus rendezésben vizsgáljuk, a kifejezés főtagja éppen

$$x_1^{m_1}(x_1x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x_1 \dots x_k)^{m_k} = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\lambda_k} = x^\lambda$$

lesz.

Mivel $e_{\overline{\lambda}}$ szimmetrikus polinom, ezért ebből már következik, hogy az $m_\lambda$ 1 együtthatóval szerepel a monomiális szimmetrikus polinomok bázisában történő kifejtésben, míg a többi $\nu$, amire $m_\nu$ még szerepelhet, kisebbek $\lambda$-nál a lexikografikus rendezésre nézve. □

2.4.12. MEGJEGYZÉS Fontos észben tartani a különbséget $x^\lambda$ és a Schur-polinomok definíciójában szereplő $x^T$ kifejezés között.

A szimmetrikus függvények alaptételének egyik fő következménye, hogy bármely bázis elemei kifejezhetők bármely másik bázis elemeinek egész együtthatós lineáris kombinációjaként. A fentiekben (2.4.6. és 2.4.7. Állítás) már konkrétan kiszámítottunk bizonyos bázistranszformációkat; nemsokára megadjuk a nevezetes bázisok közti összes transzformációt.

2.4.13. MEGJEGYZÉS A szimmetrikus függvények alaptétele szerint

$$\Lambda \simeq \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots] \simeq \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots]$$

mint gyűrűk, azonban két esetben a fokszámozás eltérő.

A következőkben megvizsgáljuk a szimmetrikus polinomok $\mathbb{Z}$-modulusának, $\Lambda_n$-nek a nevezetes bázisok közti bázistranszformációit.

A továbbiakban olyan mátrixokkal foglalkozunk, amelyek sorait és oszlopait egy $n$ pozitív egész partícióival indexeljük. Az $n$ szám partícióit a fordított lexikografikus rendezés szerinti sorrendben adjuk meg. $J$-vel jelöljük az alábbi módon definiált ún. transzpozíciós mátrixot, azaz

$$J_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \overline{\lambda} = \mu \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyenek $(u_\lambda)$ és $(v_\lambda)$ két olyan $\mathbb{Z}$-bázisa $\Lambda^n$-nek, melyeket $n$ partícióival indexelünk. Jelölje $M(u,v)$ az

$$u_\lambda = \sum_\mu M_{\lambda,\mu} v_\mu$$

bázistranszformáció mátrixát. Ekkor $M(u,v)$-t az $(u_\lambda)$ bázisról a $(v_\lambda)$ bázisra való áttérési mátrixnak is nevezzük. Mivel $(u_\lambda)$ és $(v_\lambda)$ $\mathbb{Z}$-bázisok, ezért $M(u,v)$ egy egész értékű, nemszinguláris mátrix.

Tekintsük most $\Lambda_n$ négy nevezetes bázisát: az $n$-edfokú általánosított elemi, illetve teljes szimmetrikus polinomokat, a Schur-polinomokat, illetve a monomiális szimmetrikus polinomokat.

Egyszerű számolással igazolható, hogy ezen bázispárokhoz tartozó áttérési mátrixokat ki lehet fejezni a $K = M(s,m)$ Kostka-mátrix és a $J$ transzpozíciós mátrix segítségével. A következő táblázat $u$-adik sorában és $v$-edik oszlopában oszlopában az $M(u,v)$ áttérési mátrix áll.

| | $e$ | $h$ | $m$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | Id | $K^TJ(K^T)^{-1}$ | $K^TJK$ | $K^TJ$ |
| $h$ | $K^TJ(K^T)^{-1}$ | Id | $K^TK$ | $K^T$ |
| $m$ | $K^{-1}J(K^T)^{-1}$ | $K^{-1}(K^T)^{-1}$ | Id | $K^{-1}$ |
| $s$ | $J(K^T)^{-1}$ | $(K^T)^{-1}$ | $K$ | Id |

A fejezet hátralevő részében egy igen érdekes jelenséget vizsgálunk meg, egy, a szimmetrikus függvények terén definiált skalárszorzatot. Maga a definíció igen egyszerű.

Mivel a Schur-polinomok a szimmetrikus függvények egy $\mathbb{Z}$-bázisát alkotják, az a kikötés, hogy ortonormált bázist alkossanak, egy jóldefiniált skalárszorzatot ad $\Lambda$-n:

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = \mu \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Rögtön felmerül, hogy szeretnénk tudni a nevezetes függvényrendszerek elemei közti szorzatokat.

2.4.14. ÁLLÍTÁS *Legyenek $\lambda,\mu$ partíciók. Az eddigi jelölésekkel*

$$\begin{aligned} \langle h_\lambda, m_\mu \rangle &= \delta_{\lambda\mu} , \\ \langle p_\lambda, p_\mu \rangle &= z(\lambda) \cdot \delta_{\lambda\mu} , \end{aligned}$$

*ahol*

$$z(\lambda) \stackrel{def}{=} \prod_{i\geq 1} i^{m_i} \cdot m_i! ,$$

BIZONYÍTÁS A bizonyítás mindkét esetben mechanikus; felírjuk a szereplő szimmetrikus függvényeket a Schur-függvények által alkotott bázisban, majd a bilinearitás segítségével kiszámítjuk a megfelelő skalárszorzatokat. A két állítás közül az elsőt részletesen végigszámoljuk, a másodikat meghagyjuk feladatként.

Az említett terv szerint írjuk fel $h_\lambda(x)$-et és $m_\mu(y)$-t az $s_\lambda$ bázisban:

$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &= \sum_\nu a_{\lambda\nu} s_\nu(x) \\ m_\mu(y) &= \sum_\kappa b_{\mu\kappa} s_\kappa(y) , \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y) &= \sum_\lambda \left(\sum_\nu a_{\lambda\nu}s_\nu(x)\right)\left(\sum_\kappa b_{\lambda\kappa}s_\kappa(y)\right) \\
&= \sum_{\lambda,\kappa,\nu} a_{\lambda\nu}b_{\lambda\kappa}s_\nu(x)s_\kappa(y) \\
&= \sum_{\kappa,\nu}\left(\sum_\lambda a_{\nu\lambda}b_{\lambda\kappa}\right)s_\nu(x)s_\kappa(y)\ .
\end{aligned}$$

Korábban már láttuk (ld. 2.1.24. Tétel), hogy

$$\sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)\ ,$$

ahonnan felhasználva, hogy az $s_\lambda(x)s_\mu(y)$-k $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ felett is lineárisan függetlenek, kapjuk, hogy

$$\sum_\lambda a_{\nu\lambda}b_{\lambda\kappa} = \delta_{\nu\kappa}$$

□

Ebből gyorsan következik, hogy

$$\begin{aligned}
\langle h_\lambda, m_\mu\rangle &= \langle\sum_\nu a_{\lambda\nu}s_\nu(x), \sum_\kappa b_{\mu,\kappa}s_\kappa(y)\rangle \\
&= \sum_{\nu\kappa} a_{\lambda\nu}b_{\mu\kappa}\langle s_\nu(x), s_\kappa(y)\rangle \\
&= \delta_{\lambda\mu}\ .
\end{aligned}$$

Legyen $(u_\lambda)$ és $(v_\lambda)$ két olyan $\mathbb{Z}$-bázisa $\Lambda_n$-nek, amelyeket $n$ partícióival indexelünk. Jelölje $T(u,v)$ a

$$T_{\lambda,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_\lambda, v_\mu\rangle$$

összefüggéssel definiált mátrixot. A következő táblázat $u$-adik sorában és $v$-edik oszlopában a $T(u,v)$ skalárszorzatmátrixot írtuk fel:

| | $e$ | $h$ | $m$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $JKK^TJ$ | $J^TKK^T$ | $J$ | $K^TJ$ |
| $h$ | $KK^TJ$ | $KK^T$ | $1$ | $K^T$ |
| $m$ | $J$ | $1$ | $(K^T)^{-1}K$ | $K^{-1}$ |
| $s$ | $K^TJ$ | $K^T$ | $K^{-1}$ | $1$ |

Végezetül tekintsük az

$$\begin{aligned} \omega : \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ s_\lambda &\mapsto s_{\overline{\lambda}} \end{aligned}$$

hozzárendelés által meghatározott lineáris transzformációt, ami egy új, érdekes struktúrát ad meg a szimmetrikus függvények gyűrűjén.

2.4.15. ÁLLÍTÁS *Az $\omega : \Lambda \to \Lambda$ homomorfizmus egy izometrikus gyűrűhomomorfizmus a $\langle\, , \,\rangle$ skalárszorzatra nézve, emellett*

$$\omega(h_\lambda) = e_\lambda\,, \quad \textit{és} \quad \omega(p_\lambda) = (-1)^{\sum_i (\lambda_i - 1)} p_\lambda\,.$$

BIZONYÍTÁS Az $\omega : \Lambda \to \Lambda$ lineáris leképezés izometrikus, mivel az $s_\lambda$ Schur-függvények által alkotott ortonormált bázist ugyanabba az ortonormált bázisba viszi, így megőrzi az adott skaláris szorzatot.

Ahhoz, hogy $\omega$ gyűrűhomomofizmus legyen, be kell látni, hogy szorzattartó (a multiplikatív egységet láthatóan megtartja). Mivel $\omega$ lineáris transzformáció,

$$\omega(s_\lambda \cdot s_\mu) = \omega(\sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu) = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu}\omega(s_\nu)\,,$$

ezért

$$\omega(s_\lambda \cdot s_\mu) = \sum_\nu c^{\overline{\nu}}_{\lambda\mu} s_{\overline{\nu}} = \sum_\nu c^\nu_{\overline{\lambda}\overline{\mu}} s_\nu\,.$$

Utóbb kihasználtuk, hogy

$$c^\nu_{\overline{\lambda}\overline{\mu}} = c^{\overline{\nu}}_{\lambda\mu}\,,$$

lényegében a Littlewood–Richardson-együtthatók definíciója miatt. Ebből következik, hogy

$$\omega(s_\lambda \cdot s_\mu) = s_{\overline{\lambda}} \cdot s_{\overline{\mu}} = \omega(s_\lambda)\omega(s_\mu)\,,$$

vagyis $\omega$ valóban szorzattartó.

Az

$$\omega(h_\lambda) = e_\lambda$$

egyenlőség közvetlen számolással adódik a

$$\omega(h_p) = \omega(s_{(p)}) = s_{(1,1,\ldots,1)} = e_p$$

összefüggés és az $\omega$ leképezés szorzattartó volta miatt.

Ismét csak $\omega$ gyűrűhomomorfizmus volta miatt a

$$\omega(p_\lambda) = (-1)^{\sum_i (\lambda_i - 1)} p_\lambda$$

állítás visszavezethető a

$$\omega(p_r) = (-1)^{r-1} p_r$$

egyenlőségre. Ez utóbbi viszont teljes indukcióval következik a

$$\begin{aligned} ne_n(x) - p_1(x)e_{n-1}(x) + \cdots + (-1)^n p_n(x) &= 0 \\ nh_n(x) - \cdots - p_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

azonosságokból (ld. 2.1.20. Állítás és 2.1.21. Feladat). □

2.4.16. FELADAT *Az $\omega$ involúció felhasználásával mutassuk meg, hogy*

$$\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{k}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} m_\lambda(x) e_\lambda(y) = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_{\overline{\lambda}}(y) .$$

## 2.5. Szimmetrikus polinomok együtthatói

Ennek az alfejezetnek a témája szimmetrikus polinomok együtthatóinak a vizsgálata. Az itt szereplő eredményeknek fontos szerepe lesz a szimmetrikus csoport karaktereire vonatkozó Frobenius-féle formula bizonyításában. Tekintsük az $m$-változós egészegyütthatós polinomok $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_m]$ gyűrűjét. Egy tetszőleges, legfeljebb $m$ sorból álló $\lambda$ partíció esetén jelölje $x^\lambda$ az

$$x_1^{\lambda_1}\ldots x_m^{\lambda_m}$$

monomot.

2.5.1. DEFINÍCIÓ *Ha $f$ $m$-változós szimmetrikus polinom, $\lambda$ egy legfeljebb $m$ sorból álló partíció, akkor legyen*

$$[f]_\lambda$$

*az $x^\lambda$ monom együtthatója $f$-ben.*

2.5.2. MEGJEGYZÉS Mivel $f$ szimmetrikus, $[f]_\lambda$ az összes

$$x_{\sigma(1)}^{\lambda_1}\ldots x_{\sigma(m)}^{\lambda_m}$$

alakú monom $f$-beli együtthatója is egyben ($\sigma \in S_n$).

2.5.3. DEFINÍCIÓ *Legyen $\lambda$ egy legfeljebb $m$ sorból álló partíció. Ekkor jelölje*

$$\tilde{\lambda} \stackrel{def}{=} (\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \ldots, \lambda_m) .$$

2.5.4. MEGJEGYZÉS Mivel $\lambda$ partíció volt, minden $1 \le i \le m-1$ esetén $\lambda_i \ge \lambda_{i+1}$. Emiatt minden $1 \le i \le m-1$-re

$$\lambda_i + (i-1) \ge \lambda_{i+1} + (i-2) ,$$

így $\tilde{\lambda}$ is egy partíció, amelynek legfeljebb $m$ sora van.

Az alfejezet fő célja az alábbi tétel igazolása.

2.5.5. TÉTEL *Legyen $f$ egy tetszőleges $n$-edfokú $m$-változós szimmetrikus polinom. Ekkor*

$$[f]_\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda}[\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} ,$$

*ahol $\Delta$ az $m$-változós Vandermonde-féle determináns.*

A tétel bizonyítása az alábbi észrevételen alapszik.

2.5.6. LEMMA *Ha $f$ tetszőleges szimmetrikus polinom, akkor*

$$f = \sum_\lambda [\Delta \cdot f]_{\tilde{\lambda}} \cdot s_\lambda .$$

BIZONYÍTÁS Mivel $x^{\tilde{\lambda}}$ együtthatója $\Delta \cdot s_\lambda$-ban 1, és az $s_\lambda$ polinomok a szimmetrikus polinomok egy $\mathbb{Z}$-modulusbázisát alkotják,

$$s_\lambda = \sum_\mu [\Delta \cdot s_\lambda]_{\tilde{\mu}} s_\mu .$$

Legyen $f$ kifejtése az $s_\lambda$ bázisban

$$f = \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda .$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f &= \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda \\ &= \sum_{\lambda,\mu} \alpha_\lambda [\Delta \cdot s_\lambda]_{\tilde{\mu}} s_\mu \\ &= \sum_\mu \left( \sum_\lambda \alpha_\lambda [\Delta \cdot s_\lambda]_{\tilde{\mu}} \right) s_\mu . \end{aligned}$$

A $[\Delta \cdot f]_{l^\mu}$ kifejezés lineáris $f$-ben, így

$$f = \sum_\mu [\Delta \cdot \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda]_{\tilde{\mu}} s_\mu = \sum_\mu [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} s_\mu .$$

Mivel a Schur-polinomok a szimmetrikus polinomok egy egészek feletti bázisát alkotják, Az $f$ elem két előállításában szereplő együtthatóknak páronként meg kell egyezniük. Emiatt

$$a_\lambda = [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} ,$$

vagyis a lemma állítását beláttuk. □

A tétel igazolása az iménti gondolatmenet egy alkalmazása.

BIZONYÍTÁS (2.5.5. tétel) Először is, vegyük észre, hogy definíció szerint

$$f = \sum_\mu [f]_\lambda m_\lambda .$$

Másrészt az előző lemma alapján

$$f = \sum_{\mu} [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} s_{\mu} .$$

Az eddigi információinkat összerakva

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\mu} [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} s_{\mu} \\ &= \sum_{\mu} [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} \left( \sum_{\lambda} K_{\mu\lambda} m_{\lambda} \right) \\ &= \sum_{\lambda} \left( \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} \right) m_{\lambda} . \end{aligned}$$

Ebből az $m_{\lambda}$ polinomok lineáris függetlensége miatt adódik a tétel állítása. □

2.5.7. MEGJEGYZÉS A szimmetrikus függvények tanulmányozása során megismert skalárszorzat segítségével

$$[\Delta \cdot f]_{\lambda} = \langle s_{\lambda}, f \rangle .$$

2.5.8. FELADAT *Legyen $p_{\alpha}$ egy Newton-féle általánosított hatványösszegpolinom, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n$, $\lambda, \mu$ az $n$ szám két tetszőleges rögzített partíciója. Az alfejezet eredményeinek segítségével igazoljuk, hogy*

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{z(\alpha)} [\Delta \cdot p_{\alpha}]_{\tilde{\lambda}} [\Delta \cdot p_{\alpha}]_{\tilde{\mu}} = \delta_{\lambda\mu} .$$

Szimmetrikus polinomok együtthatói közötti további összefüggésekért ld. [13, Appendix A.1.].

# 3. fejezet

# A szimmetrikus csoportok reprezentációelmélete

A szimmetrikus csoportok a matematika legalapvetőbb objektumai közé tartoznak, lényegében a matematika minden területén és az elméleti fizikában is fontos szerepet játszanak. Ily módon az is világos, hogy fontos a szimmetrikus csoportokat jól megismerni, amibe a reprezentációelméletük értelemszerűen beletartozik. A fejezet során ezt a feladatot végezzük el; az eddig felhalmozott ismereteink segítségével leírjuk a szimmetrikus csoportok irreducibilis reprezentációit a komplex számtest felett, és Frobenius nyomán kiszámítjuk az irreducibilis reprezentációkhoz tartozó karaktereket.

## 3.1. Reprezentációelméleti alapismeretek

Az alfejezet során átismételjük a csoportok reprezentációelméletének alapfogalmait. Feltételezzük, hogy az olvasó rendelkezik idevágó ismeretekkel. Ehhez kapcsolódóan hasznos lehet a [13],[25],[26], [35], [21], [8], [10], [32] könyvek valamelyikének az idevágó fejezeteit átnézni. Az áttekinthetőség növelése érdekében használni fogunk elemi kategóriaelméleti fogalmakat (kategória, funktor, kategóriák ekvivalenciája, stb.). Amennyiben ezek nem lennének ismertek, például a [28] vagy a [37] művekből gyorsan el lehet sajátítani őket.

Legyen tehát $G$ egy csoport, nem feltétlenül véges. Mi a $G$ csoportnak a komplex számtest felett értelmezett reprezentációival fogunk foglalkozni. Ez egyáltalán nem szükségszerű, csoportok véges test feletti vagy a racionális számtest feletti reprezentációinak vizsgálata a modern matematika igen fontos területe. Mivel azonban számunkra a komplex test feletti elmélet az érdekes, nem fogunk azzal törődni, hogy az állításaink közül melyik milyen általánosságban állja meg a helyét.

A használt terminológia rögzítése érdekében idézzük fel az alapvető definíciókat.

3.1.1. DEFINÍCIÓ *A $G$ csoport egy* (lineáris) reprezentációja *egy* $(\rho, V)$ *rendezett pár, ahol $V$ egy $\mathbb{C}$-vektortér,*

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

*pedig egy csoporthomomorfizmus. Egy reprezentációt igen gyakran csak a hozzátartozó homomorfizmussal jelölünk.*

*Legyenek* $(\rho,V),(\sigma,W)$ *a* $G$ *csoport reprezentációi. Egy*

$$\Phi : (\rho,V) \to (\sigma,W)$$

reprezentációk közti homomorfizmus *vagy* leképezés *egy olyan* $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ *lineáris leképezés, amelyre a*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi} & W \\ {\scriptstyle\rho(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma(g)} \\ V & \xrightarrow{\Phi} & W \end{array}$$

*diagram kommutatív minden* $g \in G$ *esetén. A csoporthatás jelölésére a* $\rho(g)(v)$ *avagy — ha nem kívánjuk a reprezentációt megnevezni —* $g.v$ *vagy* $g(v)$ *jelöléseket használjuk.*

*Egy* $(\rho,V)$ *reprezentációt* véges dimenziós*nak nevezünk, ha* $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$.

*A* $(\rho,V)$ *és* $(\sigma,W)$ *reprezentációkat* izomorf*nak tekintjük, ha léteznek olyan* $\Phi : (\rho,V) \to (\sigma,W)$ *és* $\Psi : (\sigma,W) \to (\rho,V)$ *leképezések, amelyekre*

$$(\Psi\circ\Phi)((\rho,V)) = (\rho,V) \quad \textit{és} \quad (\Phi\circ\Psi)((\sigma,W)) = (\sigma,W)\ .$$

Mi reprezentáció alatt csakis lineáris reprezentációt értünk, ezért ezt a továbbiakban nem fogjuk külön hozzátenni.

3.1.2. FELADAT *Mutassuk meg, hogy egy adott* $G$ *csoport reprezentációi a reprezentációk közti leképezésekkel mint morfizmusokkal egy kategóriát alkotnak. Pontosabban fogalmazva igazoljuk az alábbiakat.*

1. *Ha* $(\rho,V),(\sigma,W)$, *és* $(\tau,U)$ *a* $G$ *csoport reprezentációi,* $\Phi : (\rho,V) \to (\sigma,W)$ *és* $\Psi : (\sigma,V) \to (\tau,U)$ *leképezések, akkor a* $\Psi\circ\Phi : V \to W$ *lineáris leképezés a* $(\rho,V)$ *és* $(\tau,U)$ *reprezentációk közti homomorfizmust ad meg.*

2. *Ha* $\Phi,\Psi,\Lambda$ *reprezentációk közti leképezések, akkor*

$$(\Phi\circ\Psi)\circ\Lambda = \Phi\circ(\Psi\circ\Lambda)\ .$$

3. *Tetszőleges* $(\rho,V)$ *reprezentáció esetén* $\mathrm{Id}_\rho \overset{def}{=} \mathrm{Id}_V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ *egy* $(\rho,V) \to (\rho,V)$ *leképezést ad meg. Ha* $\Phi : (\rho,V) \to (\sigma,W)$ *egy leképezés, akkor*

$$\Phi\circ\mathrm{Id}_\rho = \mathrm{Id}_\sigma\circ\Phi = \Phi\ .$$

3.1.3. FELADAT *Igazoljuk, hogy a* $G$ *csoport véges-dimenziós reprezentációi a köztük lévő morfizmusokkal szintén egy kategóriát alkotnak.*

3.1.4. DEFINÍCIÓ *A 3.1.2. Feladatban konstruált kategória a* $G$ *csoport reprezentációinak a kategóriája. A jele* $\mathbf{Rep}^\infty(G)$. *A* $G$ *csoport véges-dimenziós reprezentációinak a* *kategóriáját* $\mathbf{Rep}(G)$*-vel jelöljük. Ha* $(\rho,V),(\sigma,W) \in \mathbf{Rep}(G)$ *(vagy* $\in \mathbf{Rep}^{\infty}(G)$*, akkor* $\mathrm{Mor}_G((\rho,V),(\sigma,W))$ *vagy egyszerűen csak* $\mathrm{Mor}_G(\rho,\sigma)$ *jelöli a* $(\rho,V)$*-ből* $(\sigma,W)$*-be menő reprezentációk közti leképezések halmazát.*

A 3.1.3. Feladat állítását úgy szokás fogalmazni, hogy a $G$ csoport véges-dimenziós reprezentációi $\mathbf{Rep}^{\infty}(G)$ egy teljes részkategóriáját alkotják.

3.1.5. PÉLDA Egy közismert reprezentáció az alábbi: legyen $G = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})^{\times}$ az $n \times n$-es invertálható komplex elemű mátrixok csoportja, $V = \mathbb{C}^n$. Ekkor az

$$A \mapsto (v \mapsto A \cdot v) \quad (A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})^{\times}, v \in V)$$

hozzárendelés a $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})^{\times}$ csoport egy reprezentációja.

3.1.6. PÉLDA Tetszőleges $G$ csoport és tetszőleges $V$ vektortér esetén létezik a $(1_V,V) \in \mathbf{Rep}(G)$ ún. triviális reprezentáció, amelyre

$$1_V(g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_V$$

minden $g \in G$-re.

3.1.7. PÉLDA Egy másik közismert példa a permutációk paritása. Ezt gyakran alternáló reprezentációnak is hívják. Legyen $G \stackrel{\text{def}}{=} S_n$, $g \in S_n$ az $1,2,\ldots,n$ számok egy permutációja, $V$ tetszőleges. Ekkor tetszőleges $V$ vektortér esetén

$$\alpha_V(g) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\mathrm{Id}_V & \text{ha } g \text{ páratlan permutáció} \\ \mathrm{Id}_V & \text{ha } g \text{ páros permutáció} \end{cases}$$

az $n$-edfokú szimmetrikus csoport $V$-n értelmezett alternáló reprezentációja.

A fenti két példában közös, hogy nem sokat árulnak el az adott csoportról, hiszen a csoportelemek nagy része a reprezentáció mint homomorfizmus magjába kerül.

3.1.8. DEFINÍCIÓ *Egy* $(\rho,V) \in \mathbf{Rep}(G)$ *reprezentáció* hűséges*, ha* $\ker\rho = \mathrm{id}_V$*, azaz* $\rho$ *injektív lineáris leképezés.*

Fontos kérdés, hogy vajon egy adott csoportnak van-e hűséges reprezentációja. Az alábbi konstrukció ezt teljes általánosságban megoldja.

3.1.9. PÉLDA (CAYLEY-FÉLE REGULÁRIS REPREZENTÁCIÓ) Legyen $G$ tetszőleges csoport,

$$V_G \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{h \in G} \mathbb{C} h_g$$

egy $G$ elemszámával megegyező dimenziójú komplex vektortér, ahol a koordinátákat $G$ elemeivel jelöljük. Más néven legyen $V_G$ a $G$-hez mint halmazhoz tartozó szabad $\mathbb{C}$-modulus. Azok az $e_g \in V_G$ elemek, amelyeknek a $g$ csoportelemhez tartozó koordinátája 1, az összes többi pedig 0, a $V_G$ vektortér egy bázisát alkotják.

A $G$ csoport $(\gamma,V_G)$ reguláris reprezentációját az alábbi módon definiáljuk. Ha $g \in G$, akkor

$$\gamma_G(g)(e_h) \stackrel{\text{def}}{=} e_{gh}\ .$$

Ezzel előírtunk egy $\gamma_G$ függvényt $V_G$ egy bázisán. A szabad modulusok univerzális tulajdonságából következik, hogy ez a meghatározás egyértelműen megad egy $\gamma_G(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_G, V_G)$ lineáris transzformációt. A $G$-beli csoportművelet asszociativitásából adódik, hogy $\gamma_G : G \to \mathrm{GL}(V_G)$ szorzattartó; rögtön látszik az is, hogy $1_G$ $V_G$ identitására képződik. Beláttuk tehát, hogy $\gamma_G$ a $G$ csoport egy reprezentációja.

Amennyiben $g \neq 1_G$ tetszőleges csoportelem, akkor

$$\gamma_G(g)(e_{1_G}) = e_g \ ,$$

tehát $\gamma_G(g) \neq \mathrm{Id}_{V_G}$, vagyis $\gamma_G$ hűséges.

3.1.10. MEGJEGYZÉS Térjünk vissza rövid időre a csoportreprezentációk definíciójához. Eszerint egy $(\rho, V)$ reprezentáció nem más, mint egy

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

csoporthomomorfizmus. Ezt ekvivalens módon úgy is mondhatjuk, hogy a $V$ vektortéren egy $G$-modulus struktúrát értelmezünk, azaz $G$ minden $g$ elemére megmondjuk, hogy hogyan lehet vele $V$ elemeit szorozni:

$$g \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} \rho(g)(v) \ .$$

Innen már csak egy lépés a csoportreprezentációk és a $\mathbb{C}G$ csoportalgebra feletti modulusok közti összefüggés felismerése. Ehhez először is emlékeztetünk arra, pontosan mit értünk csoportalgebra alatt.

3.1.11. DEFINÍCIÓ *Legyen $G$ tetszőleges csoport, $R$ tetszőleges*[1] *kommutatív gyűrű. Az $RG$ csoportalgebra a $G$ halmazon vett szabad $R$-modulus az alábbi szorzatstruktúrával ellátva. Jelölje $e_g$ az $RG$ szabad modulus $g$-nek megfelelő elemét. Ekkor az*

$$e_g \cdot e_h \stackrel{def}{=} e_{gh}$$

*hozzárendelés egyértelmű lineáris kiterjesztése egy $R$-bilineáris műveletet ad meg $RG$-n. Ez lesz $RG$ multiplikatív struktúrája.*

3.1.12. MEGJEGYZÉS Az $RG$ csoportalgebra egy eleme $\sum_{g \in G} r_g e_g$ alakba írható, ahol $r_g \in R$ minden $g \in G$-re. Amennyiben $G$ nem véges csoport, akkor az $r_g$ együtthatók közül legfeljebb véges sok lehet nullától különböző.

3.1.13. MEGJEGYZÉS Tetszőleges $R$ kommutatív gyűrű esetén egy $M$ $RG$-modulus nem más, mint egy $V$ $R$-modulus és egy rögzített

$$RG \to \mathrm{End}_R(V)$$

$R$-algebrahomomorfizmus, amely megadja, hogy $RG$ elemeivel hogyan szorzunk.

3.1.14. FELADAT *Igazoljuk, hogy $RG$ az imént definiált műveletekkel egy $R$-algebra. Bizonyítsuk be, hogy $RG$ pontosan akkor kommutatív, ha $G$ az.*

A továbbiakban a komplex test feletti csoportalgebrák fognak minket érdekelni. A $\mathbb{C}G$ algebra feletti baloldali modulusok kategóriáját $\mathbb{C}G - \mathrm{Mod}$ jelöli.

3.1.15. ÁLLÍTÁS *Legyen $G$ csoport. Ekkor minden $(\rho, V) \in \mathbf{Rep}^{\infty}(G)$ reprezentáció meghatároz egy $M_\rho \in \mathbb{C}G - \mathrm{Mod}$ bal-$\mathbb{C}G$-modulust; tetszőleges $M$ bal-$\mathbb{C}G$-modulushoz hozzá tudjuk rendelni a $G$ csoport egy $(\rho_M, M)$ komplex reprezentációját, amelyhez tartozó vektortér maga $M$. A két hozzárendelés egymás inverze.*

BIZONYÍTÁS Legyen $(\rho, V) \in \mathbf{Rep}^{\infty}(G)$; $M_\rho$ egy olyan baloldali modulus lesz, amely alapjául a $V$ vektortér fog szolgálni. Ha $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g\in G} \alpha_g e_g$ a csoportalgebra egy eleme $(\alpha_g \in \mathbb{C})$,$v \in V$, akkor legyen

$$\alpha \cdot v = (\sum_{g\in G} \alpha_g e_g) \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g\in G} \alpha_g \rho(g)(v) \,.$$

Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy $M_\rho$ valóban egy baloldali $\mathbb{C}G$-modulus.

Megfordítva, legyen $M \in \mathbb{C}G - \mathrm{Mod}$, és tekintsük $M$-et mint komplex vektorteret. A

$$\rho_M : G \longrightarrow \mathrm{GL}(M)$$

csoportreprezentációt az alábbi módon definiáljuk: ha $g \in G$, akkor legyen $\rho_M(g)$ a $g$-vel való szorzás mint $M$ lineáris automorfizmusa. Fontos észrevenni, hogy $M$ egy tetszőleges elemével való szorzás $M$-nek csak egy endomorfizmusa lesz, azaz nem feltétlenül invertálható; esetünkben azonban a $g^{-1}$-gyel való szorzás mint lineáris transzformáció $\rho_M(g)$ kétoldali inverze. Rögtön következik $M$ $\mathbb{C}G$-modulus voltából, hogy $\rho_M$ egy csoporthomomorfizmus.

Azt, hogy a két konstrukció egymás inverze, legtömörebben az alábbi módon gondolhatjuk meg. A 3.1.13. Megjegyzés alapján egy $\mathbb{C}G$-modulus egy olyan $\mathbb{C}$-vektortér, amelyen adott egy $\mathbb{C}G \to \mathrm{GL}(V)$ $\mathbb{C}$-algebra homomorfizmus. Mivel az $e_g$ $(g \in G)$ elemek (amelyeket $G$ elemeivel azonosíthatunk) $\mathbb{C}G$ egy bázisát alkotják, a fenti $\mathbb{C}$-algebrahomomorfizmust az $e_g$ elemekre való megszorítása egyértelműen meghatározza. □

3.1.16. TÉTEL *Tetszőleges $G$ csoport esetén a 3.1.15. Állításban megfogalmazott megfeleltetés ekvivalenciát létesít a $\mathbf{Rep}^{\infty}(G)$ és $\mathbb{C}G - \mathrm{Mod}$ kategóriák között. Hasonlóképpen $\mathbf{Rep}(G)$ ekvivalens a véges-dimenziós baloldali $\mathbb{C}G$-modulusok kategóriájával.*

BIZONYÍTÁS A 3.1.15. Állítás bizonyítása során megadtunk egy

$$\mathcal{E} : \mathrm{Ob}\,\mathbf{Rep}^{\infty}(G) \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbb{C}G - \mathrm{Mod}$$

és egy

$$\mathcal{R} : \mathrm{Ob}\,\mathbb{C}G - \mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Rep}^{\infty}(G)$$

megfeleltetést, amelyek izomorfizmus erejéig egymás inverzei. Még azt a kérdést kell rendezni, hogy mi történik a morfizmusokkal, vagyis a $\Phi, \Psi$ megfeleltetésekből funktorokat kell gyártani. Vegyük észre, hogy ha $\Phi : (\rho, V) \to (\sigma, W)$ egy reprezentációk közti leképezés, akkor $\Phi$ rögtön egy $\mathbb{C}G$-modulushomomorfizmus is egyben: legyen $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g\in G} r_g e_g \in \mathbb{C}G$, $v \in V$ tetszőleges. Ekkor

$$\alpha \cdot v = (\sum_{g\in G} r_g e_g) \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g\in G} r_g \rho(g)(v)$$

és a

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\sigma(g)"] \\ V \arrow[r, "\Phi"] & W \end{tikzcd}$$

diagramok kommutativitása miatt

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha\cdot v) &= \Phi(\sum_{g\in G} r_g\rho(g)(v)) \\ &= \sum_{g\in G} r_g\Phi(\rho(g)(v)) \\ &= \sum_{g\in G} r_g\sigma(g)(\Phi(v)) \\ &= (\sum g\in Gr_g\sigma(g))(\Phi(v)) \\ &= \alpha\cdot\Phi(v)\ , \end{aligned}$$

amint azt állítottuk; $\Phi$-t mint $\mathbb{C}G$-modulushomomorfizmust $\mathcal{E}(\Phi)$-vel jelöljük.

Megfordítva, legyen $\Psi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G-\mathrm{Mod}}(V,W)$, és tekintsük $\Psi$-t mint $\mathbb{C}$-lineáris leképezést, jelölje $\rho$ és $\sigma$ a 3.1.15. Állításban $V$-hez, illetve $W$-hez hozzárendelt reprezentációkat. Válasszunk egy tetszőleges $g\in G$ elemet. Ekkor

$$\rho(g)(v) = g\cdot_V v = e_g\cdot_V v\ ,$$

és

$$\sigma(g)(w) = g\cdot_W w = e_g\cdot_W w\ ,$$

amiből

$$\Psi(\rho(g)) = \Psi(e_g\cdot_V v) = e_g\cdot_W \Psi(v) = \sigma(g)(\Psi(v))$$

következik, hiszen $\Psi$ egy $\mathbb{C}G$-modulushomomorfizmus, így a csoportalgebra elemeinek hatásával felcserélhető. Ezzel beláttuk, hogy $\Psi$ megvalósít egy reprezentációk közti leképezést, ebben a minőségében $\mathcal{R}(\Psi)$-vel jelöljük.

Mivel mind $\mathcal{E}$, mind $\mathcal{R}$ egy morfizmust mint vektorterek közti lineáris leképezést változatlanul hagynak, rögtön adódik, hogy

$$\mathcal{E}(\Phi_2\circ\Phi_1) = \mathcal{E}(\Phi_2)\circ\mathcal{E}(\Phi_1)\ ,\ \mathcal{E}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_V\ ,$$

és

$$\mathcal{R}(\Psi_2\circ\Psi_1) = \mathcal{E}(\Psi_2)\circ\mathcal{E}(\Psi_1)\ ,\ \mathcal{E}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_V\ ,$$

azaz $\mathcal{E}$ és $\mathcal{R}$ funktorok. A 3.1.15. Állítás szerint

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}((\rho,V))) \simeq (\rho,V) \text{ és } \mathcal{E}(\mathcal{R}(M)) \simeq M\ ,$$

tehát az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{R}$ funktorok valóban megadnak a $\mathbf{Rep}^\infty(G)$ és $\mathbb{C}G-\mathrm{Mod}$ kategóriák közt egy ekvivalenciát. □

3.1.17. MEGJEGYZÉS Az iménti tételnek van egy rendkívül fontos következménye: tetszőleges, $\mathbb{C}G$-modulusokra értelmezett konstrukciót gondolkodás nélkül átvihetünk a $G$ csoport reprezentációinak körébe. Innentől kezdve világos, hogy mit tekintünk két reprezentáció direkt összegének, tenzorszorzatának, duálisának, stb. Ezt a gondolatmenetet a következő fejezetben a gyakorlatba is átültetjük.

3.1.18. MEGJEGYZÉS Legyen $G$ csoport, $M_1, M_2$ baloldali $\mathbb{C}G$-modulusok. Ekkor képezhetjük $M_1$ és $M_2$ direkt összegét, amelyet szokás szerint $M_1 \oplus M_2$-vel jelölünk. Mint vektortér $M_1 \oplus M_2$ az $M_1$ és $M_2$ vektorterek direkt összege, amin a $\mathbb{C}G$ csoportalgebra koordinátánként hat: ha $\alpha \in \mathbb{C}G$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, akkor

$$\alpha \cdot (m_1, m_2) = (\alpha \cdot m_1, \alpha \cdot m_2)\ .$$

A 3.1.16. Tételnek megfelelően rögtön adódik a $G$ csoport $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ reprezentációinak direkt összege: $g \in G$, $v_1 \in V_1$ és $v_2 \in V_2$ esetén

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2))\ .$$

Alapvető jelentőségű kérdés, hogyan tudjuk egy adott csoport reprezentációit „egyszerűbb” részekből összerakni. Az alábbi definíció természetesen tetszőleges gyűrű feletti modulusokra változatlanul érvényben marad.

3.1.19. DEFINÍCIÓ *Egy $M \in \mathbb{C}G - \mathrm{Mod}$ modulust* irreducibilis*nek (vagy* egyszerű*nek) hívunk, ha nincsen valódi (azaz a 0-tól és önmagától különböző) részmodulusa. Azt mondjuk, hogy $M$* felbontható*, ha léteznek $M_1, M_2 \neq 0$ modulusok, amelyekre $M \simeq M_1 \oplus M_2$. Ha $M$ nem felbontható, akkor* felbonthatatlan*nak nevezzük.*

A 0 modulus gyakran nem szokták irreducibilisnek tekinteni.

3.1.20. MEGJEGYZÉS A definíció azonnali következménye, hogy egy irreducibilis $\mathbb{C}G$-modulus felbonthatatlan. Megfordítva viszont általában nem igaz: egy felbonthatatlan modulus gyakran nem irreducibilis. A reprezentációelmélet egyik alapproblémája a felbonthatatlan és irreducibilis modulusok közti különbség vizsgálata.

3.1.21. PÉLDA Egy jól ismert példa felbonthatatlan de nem irreducibilis modulusra: tekintsük az egész számok $\mathbb{Z}$ gyűrűjét mint önmaga feletti modulust; $\mathbb{Z}$ távolról sem irreducibilis, $d\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ nemtriviális részmodulus minden $d \neq 0, \pm 1$ egész szám esetén, amely nem direkt összeadandója $\mathbb{Z}$-nek.

Ez utóbbit a következő módon lehet egyszerűen belátni: mint 1-rangú torziómentes $\mathbb{Z}$-modulust $\mathbb{Z}$-t nem tudjuk két nemnulla $\mathbb{Z}$-modulus direkt összegeként előállítani a végesen generált abel-csoportok alaptétele miatt.

3.1.22. FELADAT *Legyen $V = \mathbb{C}^n$, és tekintsük az $n \times n$-es invertálható felső háromszögmátrixok $B_n \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})^\times$ csoportját. A korábban látottak alapján $V$ egy $\mathbb{C}B_n$-modulus a mátrixszorzásra nézve. Igazoljuk, hogy $V$ egy felbonthatatlan, de nem irreducibilis $\mathbb{C}B_n$-modulus.*

3.1.23. DEFINÍCIÓ *Legyen* $(\rho, V) \in \mathbf{Rep}^{\infty}(G)$, $W \subseteq V$ *egy altér. Azt mondjuk, hogy* $W$ $\rho$*-invariáns, ha minden* $g \in G$ *esetén*

$$\rho(g)(W) \subseteq W .$$

*Ha* $W \subseteq V$ *invariáns altér, akkor* $(\rho|_W, W)$*-t* $(\rho, V)$ *egy* részreprezentáció*jának vagy* megszorítás*ának hívjuk.*

3.1.24. MEGJEGYZÉS Mivel $\rho(g)$ invertálható lineáris transzformáció, a $\rho(g)(W) \subseteq W$ feltételből rögtön $\rho(g)(W) = W$ is következik.

3.1.25. MEGJEGYZÉS Vegyük észre, hogy egy $W \subseteq V$ altér pontosan akkor invariáns, ha $W \subseteq V$ rész $\mathbb{C}G$-modulus a $\rho$-ból származtatott $\mathbb{C}G$-modulusstruktúrára nézve.

3.1.26. FELADAT *Legyen* $\phi : (\rho, V) \to (\sigma, W)$ *egy* $G$ *csoport két reprezentációja közti homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy* $\ker \phi \leq V$ *és* $\operatorname{im} \phi \leq W$ *egyaránt invariáns alterek az adott* $G$*-modulusstruktúrákra nézve.*

3.1.27. DEFINÍCIÓ *Legyen* $G$ *tetszőleges csoport,* $(\rho, V) \in \mathbf{Rep}^{\infty}(G)$*. A* $\rho$ *reprezentációt* irreducibilis*nek hívjuk, ha nincsen valódi részreprezentációja,* felbontatható*nak, ha előáll mint két valódi részreprezentáció direkt összege, és* felbonthatatlan*nak, ha ez utóbbi nem fordul elő.*

3.1.28. MEGJEGYZÉS Egy $(\rho, V)$ reprezentáció pontosan akkor irreducibilis, ha nincsen valódi invariáns altere.

3.1.29. MEGJEGYZÉS Térjünk vissza egy pillanatra a korábban definiált (3.1.6., illetve 3.1.7.) ún. triviális és alternáló reprezentációkra. Ezek pontosan akkor voltak irreducibilisek, ha az alapul szolgáló vektortér egydimenziós volt. Emiatt általános szokás, hogy triviális, illetve alternáló reprezentáció alatt az egydimenziós vektortéren vett változatokat értik.

A nemkommutatív gyűrűk feletti modulusok vizsgálatában kulcsfontosságú szerep jut az ún. féligegyszerű modulusoknak.

3.1.30. DEFINÍCIÓ *Legyen* $R$ *tetszőleges nem feltétlenül kommutatív gyűrű,* $M$ *bal-*$R$*-modulus. Azt mondjuk, hogy* $M$ féligegyszerű*, ha egyszerű modulusok direkt összege.*

3.1.31. MEGJEGYZÉS Az iménti definíció alapján a 0 modulus féligegyszerű. Egy $M$ $R$-modulus pontosan akkor féligegyszerű, ha minden részmodulusa direkt összeadandó.

Általában is nagyon fontosak azok a gyűrűk, amelyek felett minden bal-$R$-modulus féligegyszerű.

3.1.32. DEFINÍCIÓ *Egy* $R$ *gyűrűt* féligegyszerűnek *hívunk, ha minden bal-*$R$*-modulus féligegyszerű.*

3.1.33. MEGJEGYZÉS A féligegyszerű gyűrűk haszna többek közt abból fakad, hogy a felettük vett modulusok tanulmányozását rögtön visszavezethetjük az egyszerű modulusok vizsgálatára.

Speciálisan féligegyszerű gyűrűk felett egy modulus pontosan akkor irreducibilis, ha felbonthatatlan.

A féligegyszerű gyűrűknek igen sok ekvivalens jellemzése van (ld. [25, 1.2 Fejezet]), ezek közül számunkra az alábbi a legérdekesebb.

3.1.34. TÉTEL *Egy $R$ gyűrű pontosan akkor féligegyszerű, ha $R$ mint önmaga feletti bal-$R$-modulus féligegyszerű.*

BIZONYÍTÁS [25, 2.5 Tétel]. □

3.1.35. MEGJEGYZÉS Ha $R$ féligegyszerű gyűrű, akkor az egyszerű bal-$R$-modulusok izomorfia erejéig megegyeznek a minimális balideálokkal.

Emellett az ún. Wedderburn–Artin-elmélet igen pontosan leírja a féligegyszerű gyűrűk szerkezetét.

3.1.36. TÉTEL *(Wedderburn–Artin) Legyen $R$ féligegyszerű gyűrű. Ekkor léteznek olyan $r, n_1, \ldots, n_r$ pozitív egészek és $D_1, \ldots, D_r$ ferdetestek, amelyekre*

$$R \simeq \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_r}(D_r) \ .$$

*Az $r$ szám egyértelműen meg van határozva, az $(n_i, D_i)$ párok permutáció erejéig.*

BIZONYÍTÁS [25, 3.5 Tétel]. □

Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy egy véges $G$ csoport esetén a $\mathbb{C}G$ csoportalgebra féligegyszerű. Ugyan ez minket közvetlenül nem fog érinteni, fontos tudni, hogy a féligegyszerűség nem csak a komplex test felett igaz.

3.1.37. TÉTEL *(Maschke) Legyen $G$ véges csoport, $K$ test. Ekkor a $KG$ csoportalgebra pontosan akkor féligegyszerű, ha* $\mathrm{char}\, K \not| |G|$.

BIZONYÍTÁS [25, 6.1 Tétel] □

Mostantól kezdve feltesszük, hogy $G$ véges csoport. A 3.1.33. Megjegyzés alapján $G$ komplex reprezentációinak ismeretéhez elegendő az irreducibilis reprezentációk leírása. Célunk pontosan ez, az elkövetkező fejezetek során el fogunk jutni a szimmetrikus csoportok irreducibilis reprezentációinak meghatározásához.

Egy azonnal tisztázandó kérdés az általunk vizsgált véges-dimenziós reprezentációk irreducibilis részreprezentációkra történő felbontásának egyértelműsége. Maschke tétele alapján minden reprezentáció féligegyszerű, tehát valóban felbomlik irreducibilis reprezentációk direkt összegére. Amint mindjárt látni fogjuk, a felbontás egyértelmű, és ez a tény az alábbi egyszerű megfigyelés következménye.

3.1.38. LEMMA *(Schur-lemma) Legyen $G$ véges csoport, $(\rho, V), (\sigma, W)$ $G$ komplex irreducibilis reprezentációi, $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Rep}}(G)((\rho, V), (\sigma, W))$ egy reprezentációk közti morfizmus. Ekkor $\phi$ vagy izomorfizmus, vagy a $0$ leképezés. Ha $(\rho, V) = (\sigma, W)$, akkor $\phi$ az identitás egy konstansszorosa.*

BIZONYÍTÁS Mivel $\ker \phi \leq V$ és $\mathrm{im}\, \phi \leq W$ mindketten invariáns alterek, $\ker \phi = 0$ vagy $\ker \phi = V$, illetve $\mathrm{im}\, \phi = 0$ vagy $\mathrm{im}\, \phi = W$. A lehetséges esetek vizsgálatából rögtön következik az első állítás.

A második állítás igazolásához fel fogjuk használni, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt. Eszerint ugyanis $\phi$-nek van egy $\alpha \in \mathbb{C}$ sajátértéke $V$-n, azaz az említett $\alpha$-ra

$$\ker(\phi - \alpha \cdot \mathrm{Id}_V) \neq 0 \, .$$

Ekkor az első állítás miatt $\phi - \alpha \cdot \mathrm{Id}_V$ szükségképpen a 0 leképezés, vagyis $\phi = \alpha \cdot \mathrm{Id}_V$. □

3.1.39. MEGJEGYZÉS A Schur-lemma egy ekvivalens megfogalmazása az alábbi: ha $(\rho, V)$,$(\sigma, W)$ a $G$ csoport komplex irreducibilis reprezentációi, akkor

$$\dim \mathrm{Hom}_G((\rho, V), (\sigma, W)) = \begin{cases} 0 & \text{ha } (\rho, V) \not\simeq (\sigma, W) \\ 1 & \text{ha } (\rho, V) \simeq (\sigma, W) \end{cases} .$$

Amint azt az elkövetkezőkben látni fogjuk, a $\dim \mathrm{Hom}_G((\rho, V), (\sigma, W))$ mennyiség a $G$ csoport reprezentációinak körében a skalárszorzathoz hasonló szerepet tölt be.

3.1.40. TÉTEL *Legyen $(\rho, V)$ a $G$ véges csoport egy reprezentációja. Ekkor $V$-nek létezik egy*

$$V = V_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus m_r}$$

*felbontása, ahol a $V_i$-k páronként különböző irreducibilis részreprezentációk. $V$ egyértelműen meghatározza az $r$ számot, az irreducibilis $V_i$ reprezentációkat, illetve ezek $m_i$ multiplicitásait.*

BIZONYÍTÁS Ha $U \leq V$ tetszőleges $\rho$-invariáns altér, akkor $U$-t automatikusan a $(\rho|_U, U)$ reprezentációnak tekintjük.

Tegyük fel, hogy

$$V = W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_s^{\oplus n_s}$$

egy irreducibilis reprezentációkra történő felbontás. Tekintsük a $V_i \leq V$ irreducibilis részreprezentációt, és tetszőleges $1 \leq j \leq s$ esetén a $\phi_j$-vel jelölt

$$V_i \hookrightarrow V_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus m_r} = V = W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_s^{\oplus n_s} \twoheadrightarrow W_j$$

kompozíciót. Ez minden olyan esetben a nulla leképezést adja, amikor $W_j \not\simeq V_i$. Mivel $V_i \hookrightarrow V$ nem a nulla leképezés, lesz pontosan egy $1 \leq j \leq s$, amelyre $V_i \simeq W_j$. Beláttuk tehát, hogy minden $1 \leq i \leq r$ indexhez létezik pontosan egy olyan $1 \leq j \leq s$, amelyre $V_i \simeq W_j$. A $V$-k és $W$-k szerepét felcserélve kapjuk, hogy $s = r$, és a két felbontásban izomorfizmus erejéig pontosan ugyanazok az irreducibilis reprezentációk szerepelnek.

A tétel hátralévő része a

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V_i, V) = m_i$$

formulából következik. Ez utóbbit az alábbi módon láthatjuk be: mivel $V$ a $V_i$ irreducibilis reprezentációk megfelelő multiplicitással vett direkt szorzata,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(V_i, V) &\simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{Hom}_G(V_i, \oplus_{k=1}^{m_j} V_j) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_G(V_i, \oplus_{k=1}^{m_i} V_i) \\ &\simeq \bigoplus_{k=1}^{m_i} \mathrm{Hom}_G(V_i, V_i) \, . \end{aligned}$$

Így a 3.1.39. Megjegyzés miatt a lánc két végének dimenzióját véve valóban a kívánt állítást kapjuk. □

3.1.41. MEGJEGYZÉS Érdemes az előbbi bizonyítás utolsó lépését külön is megemlíteni: eszerint, ha $(\rho, V)$ a $G$ csoport egy irreducibilis, $(\sigma, W)$ egy tetszőleges reprezentációja, akkor

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G((\rho, V), (\sigma, W))$$

a $(\rho, V)$-nek a $(\sigma, W)$ irreducibilis reprezentációkra történő felbontásához tartozó multiplicitása.

Véges csoportok reprezentációinak (illetve általánosabban csoportok véges-dimenziós reprezentációinak) vizsgálatának az egyik legfontosabb eszköze a reprezentáció karaktere.

3.1.42. DEFINÍCIÓ *Legyen $G$ véges csoport, $(\rho, V) \in \mathbf{Rep}(G)$. Ekkor a*

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{aligned}$$

*hozzárendelést a $\rho$ reprezentáció* karakter*ének nevezzük.*

Egy alapvető észrevétel, hogy egy adott reprezentáció karakterének egy csoportelemen felvett értéke csak a csoportelem konjugáltosztályától függ, vagyis a karakterek osztályfüggvények[2]: ha $g, h \in G$, $\chi$ a $(\rho, V)$ reprezentáció karaktere, akkor

$$\chi(hgh^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1} = \mathrm{Tr}\,\rho(g) = \chi(g)\ .$$

A Schur-lemma, illetve a 3.1.39. Megjegyzés ortonormalitási összefüggése a karakterek körében egy valódi skalárszorzatot eredményez.

3.1.43. DEFINÍCIÓ *Jelölje $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(G)$ a $G$-beli konjugáltosztályokon értelmezett komplex értékű függvények vektorterét. Definiálunk a $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(G)$ téren egy komplex bilineáris függvényt. Tetszőleges $\eta, \xi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(G)$ esetén legyen*

$$\langle \eta, \xi \rangle \stackrel{def}{=} \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \eta(g)\overline{\xi(g)}\ ,$$

*ahol a felülvonás a komplex konjugáltat jelöli.*

3.1.44. FELADAT *Ellenőrizzük hogy a*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(G) \times \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\eta, \xi) &\mapsto \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \eta(g)\overline{\xi(g)} \end{aligned}$$

*hozzárendelés valóban komplex bilineáris.*

[2]Ha $G$ egy tetszőleges csoport, $S$ egy halmaz, akkor egy $f : G \to S$ függvényt *osztályfüggvény*nek hívunk, ha $f(g) = f(hgh^{-1})$ minden $h \in G$ esetén, vagyis $f$-nek a $g$ helyen felvett értékét $g$ konjugáltosztálya meghatározza.

A $G$ csoport karakterei és az osztályfüggvényeken értelmezett bilineáris függvény közti összefüggéseket írja le az alábbi központi jelentőségű tétel.

3.1.45. TÉTEL *A $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(G)$ vektortéren imént definiált bilineáris függvény egy skalárszorzat (azaz pozitív definit, speciálisan nemelfajuló), és erre a skalárszorzatra nézve az irreducibilis reprezentációk karakterei $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(G)$ egy ortonormált bázisát alkotják.*

BIZONYÍTÁS [13, 2.2 és 2.4] □

3.1.46. FELADAT *Mutassuk meg, hogy egy $(\rho, V)$ reprezentáció pontosan akkor irreducibilis, ha $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$. Továbbá, ha $(\rho, V)$ tetszőleges reprezentáció, $(\sigma, W)$ irreducibilis reprezentáció, akkor $\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle$ egyenlő $\sigma$-nak a $\rho$-beli multiplicitásával.*

3.1.47. KÖVETKEZMÉNY *A $G$ csoport irreducibilis reprezentációinak száma megegyezik a konjugáltosztályainak a számával.*

Az első és egyik legfontosabb következmény, hogy egy reprezentációt a karaktere izomorfizmus erejéig meghatároz. Ezért sokszor közvetlenül a karakterekkel foglalkozunk a reprezentációk helyett.

3.1.48. ÁLLÍTÁS *Legyen $G$ véges csoport, $(\rho, V), (\sigma, W) \in$ **Rep**$(G)$. Ekkor $\chi_\rho = \chi_\sigma$ pontosan akkor, ha $(\rho, V) \simeq (\sigma, W)$.*

BIZONYÍTÁS Egyfelől ha $(\rho, V) \simeq (\sigma, W)$, akkor minden $g \in G$ esetén $\rho(g)$ és $\sigma(g)$ hasonló lineáris transzformációk (azaz mátrixaik hasonlóak a báziscseretranszformáción keresztül), s így a nyomuk megegyezik. Ezzel az egyik irányt beláttuk.

A másik irány bebizonyításához legyen $V = V_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus m_r}$ a $V$ reprezentációnak a 3.1.40. Tételben szereplő felbontása irreducibilis reprezentációk direkt összegére. Ekkor a 3.1.45. Tétel miatt

$$\chi_V = m_1 \chi_{V_1} + \cdots + m_r \chi_{V_r} ,$$

ahol a jobboldalon egyértelműen meg van határozva $V$ által. Ekkor viszont a $(\sigma, W)$-hez tartozó irreducibilis reprezentációk és multiplicitások megegyeznek a $(\rho, V)$-hez tartozókkal, amiből $(\rho, V) \simeq (\sigma, W)$ következik. □

3.1.49. ÁLLÍTÁS *Legyenek $(\rho, V)$ és $(\sigma, W)$ a $G$ csoport reprezentációi. Ekkor*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}((\rho, V), (\sigma, W)) = \langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle .$$

BIZONYÍTÁS Bontsuk fel mindkét reprezentációt irreducibilisek direkt összegére. Mivel az állításban szereplő képlet mindkét változóban additív a direkt összeg képzésére nézve, elég abban az esetben igazolni, amikor $(\rho, V)$ és $(\sigma, W)$ egyaránt irreducibilis reprezentációk.

Ez viszont rögtön következik az irreducibilis karakterek ortonormalitásából és a 3.1.41. Megjegyzésből. □

Végül egy egyszerű de fontos módszert mutatunk be lineáris reprezentációk konstrukciójára.

3.1.50. PÉLDA Legyen $G$ csoport, $X$ egy halmaz, $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(X)$ egy csoporthomomorfizmus (másképpen a $G$ csoport egy hatása $X$-en). Az $\alpha$ csoporthatás alapján készítünk egy lineáris reprezentációt, a hozzátartozó ún. *permutációreprezentációt*. Legyen $V_X$ egy $\mathbb{C}$-vektortér $X$ elemeivel mint bázissal (azaz $V_X$ az $X$ halmazhoz hozzárendelt szabad $\mathbb{C}$-modulus). Jelölje $e_x$ az $x \in X$ elemnek megfelelő báziselemet. A $\rho_\alpha$ reprezentációt az alábbi módon adjuk meg: tetszőleges $g \in G$ esetén legyen

$$\rho_\alpha(g)\big(\sum_{x\in X} \varepsilon_x e_x\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{x\in X} \varepsilon_x e_{\alpha(g)(x)} \,.$$

3.1.51. FELADAT *Ellenőrizzük, hogy $\rho_\alpha$ valóban lineáris reprezentáció.*

3.1.52. FELADAT *Tekintsük az $X \to \mathbb{C}$ függvények komplex vektorterét, legyen továbbá $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(X)$ egy csoporthatás. Mutassuk meg, hogy az a hozzárendelés, amely egy $g \in G$ csoportelemhez az*

$$f \mapsto (\forall x \in X : x \mapsto f(\alpha(g^{-1})(x)))$$

*lineáris transzformációt rendeli (ahol $f : X \to \mathbb{C}$ tetszőleges függvény), a $G$ csoport egy lineáris reprezentációja.*

*Mi az összefüggés a most definiált reprezentáció, és az $\alpha$-hoz tartozó permutációreprezentáció között?*

3.1.53. FELADAT *Legyen $X$ egy $n$-elemű halmaz, $G = S_n$ az $n$-edfokú szimmetrikus csoport, $\alpha : S_n \to \mathrm{Aut}(X)$ az identitás. Irreducibilis-e a $\rho_\alpha$ permutációreprezentáció?*

A következő fejezetekben azzal az alapvető feladattal fogunk foglalkozni, hogy egy adott $G$ (véges) csoport meglévő reprezentációiból hogyan tudunk újakat készíteni. Két gyakran használt módszerrel ismerkedünk meg, egyrészt a multilineáris algebra eszközeinek használatával (reprezentációk duálisa, tenzorszorzata, stb.), másrészt egy $H \le G$ részcsoport reprezentációiból készített ún. indukált reprezentációkkal.

## 3.2. Lineáris algebrai konstrukciók

Feltételezzük, hogy az olvasó jól ismeri a felhasználásra kerülő multilineáris algebrai fogalmakat. Adott esetben hiánypótlásra kitűnőek például a [26],[36], [26] tankönyvek.

Az alfejezet során $G$ nem feltétlenül kell, hogy véges legyen, kivéve, ha ezt kifejezetten említjük. Legyen tehát $G$ egy csoport, $(\rho, V)$, $(\sigma, W)$ $G$ reprezentációi. Emlékeztetünk arra, hogy a $\rho$ és $\sigma$ reprezentációk direkt összegét az alábbi módon definiáljuk: mint vektortér legyen $V \oplus W$ az azonos nevű vektortér, a $G$-hatás pedig legyen

$$(\rho \oplus \sigma)(g)((v,w)) = (\rho(g)(v), \sigma(g)(w))$$

minden $v \in V$, $w \in W$, és $g \in G$ esetén.

3.2.1. FELADAT *Gondoljuk meg, hogy a fent definiált* $\rho \oplus \sigma$ *reprezentációra valóban teljesül a direkt szorzat univerzális tulajdonsága. Ez pontosabban az alábbiakat jelenti: tekintsük az* $i : (\rho, V) \hookrightarrow (\rho \oplus \sigma, V \oplus W)$ *és* $j : (\sigma, W) \hookrightarrow (\rho \oplus \sigma, V \oplus W)$ *beágyazásokat. Ha* $(\tau, U)$ *a* $G$ *csoport egy reprezentációja,* $\phi : (\rho, V) \to (\tau, U)$ *és* $\psi : (\sigma, W) \to (\tau, U)$ *reprezentációk közti leképezések, akkor létezik pontosan egy* $\eta : (\rho \oplus \sigma, V \oplus W) \to (\tau, U)$ *leképezés, amelyre*

$$\phi = \eta \circ i \, , \; \psi = \eta \circ j \, ,$$

*vagy is az alábbi diagram kommutatív*

$$\begin{tikzcd}
 & (\sigma, W) \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, "\psi"] & \\
(\rho, V) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[drr, "\phi"'] & (\rho \oplus \sigma, V \oplus W) \arrow[dr, "\eta"] & \\
 & & (\tau, U)
\end{tikzcd}$$

Következőként reprezentációk tenzorszorzatát definiáljuk. A természetes ötlet az lenne, hogy bal-$\mathbb{C}G$-modulusok tenzorszorzatának megfelelő reprezentációt keresünk, azonban egy nemkommutatív gyűrű felett nem tudjuk két baloldali modulus tenzorszorzatát venni. Ezért az alábbi módon járunk el: legyen $M$,$N$ két baloldali $\mathbb{C}G$-modulus. Ekkor értelmes $M \otimes_{\mathbb{C}} N$ mint baloldali $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G$-modulus (ahol ez utóbbi alatt a megfelelő $\mathbb{C}$-algebrák tenzorszorzatát értjük). Ezután a

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathbb{C}G & \hookrightarrow & \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G \\ \alpha & \mapsto & \alpha \otimes \alpha \end{array}$$

diagonális leképezés segítségével kapunk egy természetes $\mathbb{C}G$-modulusstruktúrát a $M \otimes_{\mathbb{C}} N$ vektortéren. A reprezentációk nyelvére lefordítva a most elmondottak a következőt jelentik.

3.2.2. DEFINÍCIÓ *Legyenek* $(\rho, V), (\sigma, W)$ *a* $G$ *csoport lineáris reprezentációi. Ekkor a két reprezentáció* $(\rho \otimes \sigma, V \otimes_{\mathbb{C}} W)$ *tenzorszorzata az a reprezentáció, amelyhez tartozó vektortér* $V \otimes_{\mathbb{C}} W$*, és minden* $g \in G$ *esetén*

$$(\rho \otimes \sigma)(g)\Big(\sum_{j=1}^{r} v_j \otimes w_j\Big) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{r} (\rho(g))(v_j) \otimes (\sigma(g))(w_j) \, .$$

Mivel egy $V \otimes W$-beli elem sokféleképpen írható fel elemi tenzorok lineáris kombinációjaként, tartozunk még annak a magyarázatával, hogy az iménti definíció miért értelmes. Ezt röviden a következőképpen láthatjuk be: vesszük $V$-nek, illetve $W$-nek egy $\{e_i\}$ illetve $\{f_j\}$ bázisát, az ezek elemeiből képzett $\{e_i \otimes f_j\}$ tenzorok $V \otimes W$ egy bázisát adják. Eme bázis elemein a most definiált hatás egyértelmű és egyértelműen terjed ki lineárisan az egész $V \otimes W$ vektortérre. Gyorsan ellenőrizhető, hogy az eredmény megegyezik a 3.2.2. alatt megadottal.

3.2.3. MEGJEGYZÉS Egy fontos speciális esetet szolgáltatnak egy rögzített $(\rho, V)$ reprezentáció $(\rho^{\otimes n}, V^{\otimes n})$ tenzorhatványai. A 3.2.2. definíciót ismételten alkalmazva egy $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ elemi tenzoron a $G$ csoport hatása

$$\rho(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \rho(g)(v_1) \otimes \cdots \otimes \rho(g)(v_n) \ .$$

Egy reprezentáció tenzorhatványainak a definíciójával a zsebünkben már nem nehéz a szimmetrikus és alternáló hatványoknak megfelelő reprezentációkat előállítani.

3.2.4. MEGJEGYZÉS A szimmetrikus és alternáló hatványok az irodalomban több helyen is az adott kitevőjű tenzorhatvány altereiként vannak definiálva. Ez félrevezető, és pozitív karakterisztikában gyakran nem is igaz (ld. [5, 12. o.]).

Ez a lehetőség a $\mathrm{Sym}^n(V^*) \to (\mathrm{Sym}^n(V))^*$ természetes homomorfizmuson alapszik, amely az $n! \neq 0$ esetben (ami ha az alaptest pozitív karakterisztikájú könnyen sérülhet) izomorfizmus is egyben.

3.2.5. DEFINÍCIÓ *Legyenek $(\rho, V)$ a $G$ csoport reprezentációja. Ekkor $(\rho, V)$ n-edik* $(\mathrm{Sym}^n \rho, \mathrm{Sym}^n V)$ szimmetrikus, *illetve* $(\wedge^n \rho, \wedge^n V)$ *alternáló hatványait az alábbi módon definiáljuk: tetszőleges $v_1, \ldots, v_n \in V$, és $g \in G$ esetén legyen*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Sym}^n \rho)(g)(v_1 \cdot \cdots \cdot v_n) &\overset{def}{=} (\rho(g))(v_1) \cdot \ldots \cdot (\rho(g))(v_n) \ , \textit{ illetve} \\
(\wedge^n \rho)(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &\overset{def}{=} (\rho(g))(v_1) \wedge \cdots \wedge (\rho(g))(v_n) \ .
\end{aligned}$$

A szimmetrikus és alternáló hatványok definíciója esetén is felmerül a jóldefiniáltság kérdése, erre nézve ld. a tenzorhatványokra vonatkozó indoklást.

3.2.6. MEGJEGYZÉS A multilineáris algebrában megismert azonosságok reprezentációkra is igazak maradnak, például az alábbiak:

$$\begin{aligned}
\rho \otimes (\sigma_1 \oplus \sigma_2) &\simeq (\rho \otimes \sigma_1) \oplus (\rho \otimes \sigma_2 \ , \\
\mathrm{Sym}^n(\rho \oplus \sigma) &\simeq \oplus_{i+j=n} \mathrm{Sym}^i \rho \otimes \mathrm{Sym}^j \sigma \ , \\
\wedge^n(\rho \oplus \sigma) &\simeq \oplus_{i+j=n} \wedge^i \rho \otimes \wedge^j \sigma \ .
\end{aligned}$$

Kevésbé magától értetődő a duális reprezentáció definíciója. Ehhez menjünk vissza egy pillanatra vektorterek duálisaihoz. Legyen most $V$ egy véges-dimenziós komplex vektortér, $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ a duális tere, azaz a $V$ vektortéren értelmezett lineáris funkcionálok vektortere. Egy alapvető tulajdonsága a duális térnek, ami izomorfizmus erejéig meg is határozza, hogy a

$$\begin{aligned}
V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(\phi, v) &\mapsto \langle \phi, v \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \phi(v)
\end{aligned}$$

kiértékelés egy nemelfajuló párosítást határoz meg.

Legyen $(\rho, V)$ a $G$ csoport egy reprezentációja. A duális reprezentáció alaptere $V$ duális vektortere, azaz $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$. Értelemszerűen azt szeretnénk, hogyha a $V$-n már meglevő és $V^*$-on értelmezendő $G$-modulus-struktúrák kompatibilisek lennének az alábbi értelemben: ha $(\rho^*, V^*)$ jelöli a $\rho$-hoz tartozó duális reprezentációt, akkor minden $v \in V$, $\phi^* \in V^*$, $g \in G$ esetén

$$\langle \rho^*(g)(\phi), \rho(g)(v) \rangle = \langle \phi, v \rangle$$

teljesüljön. Mivel

$$\langle \rho^*(g)(\phi), \rho(g)(v) \rangle = \langle \rho(g)^T \rho^*(g)(\phi), v \rangle ,$$

látható, hogy ez pontosan a

$$\rho^*(g) \stackrel{\text{def}}{=} (\rho(g)^T)^{-1}$$

választással teljesül.

3.2.7. DEFINÍCIÓ *Legyen $G$ csoport, $(\rho, V) \in \mathbf{Rep}(G)$ véges-dimenziós reprezentáció. A* $(\rho^*, V^*)$ duális reprezentációt *a*

$$\rho^*(g) \stackrel{def}{=} (\rho(g)^T)^{-1} \in \mathrm{GL}(V^*)$$

*választással definiáljuk.*

3.2.8. MEGJEGYZÉS A duális reprezentáció általánosítása a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((\rho, V), (\sigma, W))$$

reprezentáció, ahol is $(\rho, V),)(\sigma, W)$ a $G$ csoport véges-dimenziós komplex reprezentációi, és a $V \to W$ lineáris leképezéseket látjuk el $G$-hatással az alábbi módon: tetszőleges $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, $v \in V$, és $g \in G$ esetén legyen

$$\mathrm{Hom}(\rho, \sigma)(g)(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} v \mapsto \sigma(g)(\phi(\rho(g^{-1})(v))) .$$

3.2.9. FELADAT *Ellenőrizzük, hogy* $(\mathrm{Hom}(\rho, \sigma), \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W))$ *valóban a $G$ csoport egy reprezentációja.*

3.2.10. FELADAT *Legyenek $(\rho, V)$,$(\sigma, W)$ véges-dimenziós $G$-modulusok. Igazoljuk, hogy a* $\mathrm{Hom}(\rho, \sigma)$ *és* $\rho^*$ *reprezentációk kompatibilisek a*

$$V^* \otimes_{\mathbb{C}} W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$$

*kanonikus vektortérizomofizmussal.*

3.2.11. MEGJEGYZÉS Amint azt már korábban említettük, a lineáris algebrai azonosságok továbbra is érvényben maradnak $G$-modulusokra. Ha $(\rho, V)$ véges-dimenziós reprezentáció, akkor

$$\mathrm{Sym}^n(\rho^*) \simeq (\mathrm{Sym}^n V)^* , \ \bigwedge^n(V^*) \simeq \left(\bigwedge^n \rho\right)^* .$$

Amint azt a 3.1 alfejezetben láttuk, csoportreprezentációk igen jellemző invariánsa a karakterük. Fontos tehát, hogy ki tudjuk számítani az iménti lineáris algebrai konstrukciókkal felépített reprezentációk karaktereit a $(\rho, V)$, $(\sigma, W)$ reprezentációk karaktereinek ismeretében. Ehhez az alábbi jól ismert eredmény nyújt segítséget.

3.2.12. ÁLLÍTÁS *Legyenek $V,W$ véges-dimenziós komplex vektorterek, $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ lineáris endomorfizmusok. Ekkor $\phi \oplus \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{C}} W)$, $\phi \oplus \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \oplus W)$, továbbá*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\phi \otimes \psi) &= \mathrm{Tr}(\phi) \cdot \mathrm{Tr}(\psi) \ , \\ \mathrm{Tr}(\phi \oplus \psi) &= \mathrm{Tr}(\phi) + \mathrm{Tr}(\psi) \ . \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS Azt a tényt fogjuk felhasználni, hogy egy endomorfizmus nyoma egyenlő a sajátértékeinek multiplicitással vett összegével. Legyenek $\phi \in \mathrm{End}(V)$, $\psi \in \mathrm{End}(W)$ tetszőleges endomorfizmusok, jelölje $\phi$ multiplicitással vett sajátértékeit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq \dim V)$, $\psi$ sajátértékeit pedig $\mu_j \in \mathbb{C}$ $(1 \leq j \leq \dim W)$.

Ekkor $\phi \oplus \psi$ és $\phi \otimes \psi$ sajátértékei $V \oplus W$-n illetve $V \otimes W$-n $\{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\}$, illetve $\{\lambda_i \mu_j\}$. Ebből azonnal adódik a direkt összeg és a tenzorszorzat nyomára vonatkozó eredmény. □

3.2.13. ÁLLÍTÁS *Legyenek $G$ egy csoport, $(\rho,V),(\sigma,W) \in \mathbf{Rep}(G)$, szokás szerint jelöljék $\chi_\rho$ és $\chi_\sigma$ a $\rho$, illetve $\sigma$ reprezentációk karaktereit. Ekkor*

$$\begin{aligned} \chi_{\rho\oplus\sigma} &= \chi_\rho + \chi_\sigma \ , \\ \chi_{\rho\otimes\sigma} &= \chi_\rho \cdot \chi_\sigma \ , \\ \chi_{\rho^*} &= \overline{\chi_\rho} \ . \end{aligned}$$

*Továbbá minden $g \in G$ esetén*

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{Sym}^2\rho}(g) &= \frac{1}{2}((\chi_\rho(g))^2 + \chi_\rho(g^2)) \ , \\ \chi_{\wedge^2\rho}(g) &= \frac{1}{2}((\chi_\rho(g))^2 - \chi_\rho(g^2)) \ . \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS A reprezentációk tenzorszorzatára illetve direkt összegére vonatkozó képlet a karakter definíciójának és a 3.2.12. Állításnak az azonnali következménye.

Hasonlóképpen $(\rho(g)^*)^{-1}$ sajátértékei $\lambda_i^{-1}$. Mivel $G$ véges csoport, minden $g \in G$ esetén $g^{|G|} = 1$, ezért

$$\rho(g)^{|G|} = \mathrm{Id}_V \ .$$

Következésképpen $\rho(g)$ minden $\lambda_i$ sajátértékére $\lambda_i^{|G|} = 1$, 1, ezért $|\lambda_i| = 1$, s így $\lambda_i^{-1} = \bar{\lambda}_i$. Ebből látható, hogy

$$\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$$

minden $g \in G$ esetén.

Az alternáló négyzetre vonatkozó képlet a következőképpen adódik: a $(\wedge^2\rho)(g)$ endomorfizmus sajátértékei a $\wedge^2 V$ vektortéren

$$\{\lambda_i\lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq \dim V\} \ .$$

Vegyük észre, hogy ugyanakkor $\rho(g^2)$ sajátértékei $V$-n

$$\left\{\lambda_i^2 \mid 1 \leq i \leq \dim V\right\} ,$$

így a

$$\sum_{1\leq i<j\leq \dim W} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}((\sum_{1\leq i\leq \dim V} \lambda_i)^2 - \sum_{1\leq i\leq \dim V} \lambda_i^2)$$

azonosságból valóban

$$\chi_{\wedge^2\rho}(g) = \frac{1}{2}((\chi_\rho(g))^2 - \chi_\rho(g^2))$$

teljesül minden $g \in G$-re.

A szimmetrikus $\mathrm{Sym}^2\rho$ négyzet karakterére vonatkozó állítást ezzel teljesen analóg módon igazolható. □

3.2.14. MEGJEGYZÉS A magasabb szimmetrikus és alternáló hatványok karaktereit is ki lehet számolni (ld. [13, Exercise A.32]). A tétel jelöléseivel

$$\chi_{\mathrm{Sym}^n\rho}(g) = \sum_{\mathbf{i}} \frac{1}{z(\mathbf{i})} \prod_{j=1}^{k_{\mathbf{i}}} \chi_\rho(g^j)^{i_j}$$

és

$$\chi_{\wedge^n V}(g) = \sum_{\mathbf{i}} \frac{(-1)^{\sum_j i_j - 1}}{z(\mathbf{i})} \prod_{j=1}^{k_{\mathbf{i}}} \chi_\rho(g^j)^{i_j} ,$$

ahol az összegzés minden olyan $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$ sorozatra terjed ki, ahol $\sum_j j i_j = \dim V$, emellett

$$z(\mathbf{i}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} i_1!1^{i_1} \cdot \ldots \cdot i_d!d^{i_d} ,$$

és $k_{\mathbf{i}}$ az $\mathbf{i}$ sorozat hossza.

Ezen összefüggések gyorsan beláthatók a szimmetrikus függvényekről látottak ismeretében, ti. a fenti formulák nem mások, mint a teljes, illetve elemi szimmetrikus polinomok kifejezései a Newton-féle általánosított hatványösszegek segítségével.

3.2.15. FELADAT *Legyen $V$ véges-dimenziós vektortér. Ekkor minden $k \geq 1$ esetén*

$$\left\{v^k \mid v \in V\right\}$$

*a $\mathrm{Sym}^k V$ vektortér egy (lineáris) generátorrendszere.*

## 3.3. Indukált reprezentációk és karaktereik

Legyen $G$ egy nem feltétlenül véges csoport, $H \leq G$. Most azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy miképpen tudjuk az egyik csoport egy reprezentációjából a másik csoport egy reprezentációját előállítani. Az egyik irány egyszerű: ha adott $G$ egy $\rho : G \to GL(V)$ reprezentációja, annak $H$-ra történő $\rho|_H : H \to GL(V)$ megszorítása automatikusan $H$ egy reprezentációja lesz.

3.3.1. DEFINÍCIÓ *Az iménti jelölésekkel legyen* $\mathrm{Res}_H^G(\rho) \in \mathbf{Rep}(H)$ *az a* $V$ *vektortéren értelmezett reprezentáció, amelyre*

$$\mathrm{Res}_H^G(\rho)(h) = \rho(h)$$

*minden* $h \in H$ *esetén. Ha* $(\sigma, W) \in \mathbf{Rep}(G)$ *és* $\Phi : (\rho, V) \to (\sigma, W)$ *egy reprezentációk közti leképezés, akkor*

$$\mathrm{Res}_H^G(\Phi) \stackrel{def}{=} \Phi$$

*mint lineáris leképezés.*

3.3.2. LEMMA *A fenti jelölésekkel* $\mathrm{Res}_H^G(\rho)$ *valóban a* $H$ *csoport egy reprezentációja, továbbá*

$$\mathrm{Res}_H^G(\Phi) : \mathrm{Res}_H^G(\rho) \longrightarrow \mathrm{Res}_H^G(\sigma)$$

*reprezentációk közti leképezés.*

3.3.3. ÁLLÍTÁS *Legyen* $G$ *tetszőleges csoport,* $H \le G$. *Ekkor* $\mathrm{Res}_H^G : \mathbf{Rep}(G) \to \mathbf{Rep}(H)$ *egy funktor.*

BIZONYÍTÁS Mivel $\mathrm{Res}_H^G(\Phi) = \Phi$ mint lineáris leképezések, ezért a funktorialitás azonnal következik a lineáris leképezések tulajdonságaiból. □

3.3.4. FELADAT *Legyen* $G$ *tetszőleges csoport,* $H \le K \le G$ *részcsoportok. Ekkor*

$$\mathrm{Res}_H^K \circ \mathrm{Res}_K^G = \mathrm{Res}_H^G$$

*mint* $\mathbf{Rep}^\infty(G) \to \mathbf{Rep}^\infty(H)$ *funktorok.*

3.3.5. MEGJEGYZÉS Azonnal látszik, hogy a reprezentációk megszorítása felcserélhető a direkt összeg képzésével.

Tekintsük a másik irányt, tételezzük fel, hogy adott $H$ egy $\rho : H \to GL(W)$ reprezentációja; ekkor már nem látszik azonnal, hogyan terjeszthető ki $(\rho, W)$ a $G$ csoport egy reprezentációjává. Jellemzően a $W$ vektortér lineáris automorfizmusai körében ez nem is tehető meg.

3.3.6. PÉLDA Legyen $G = S_4$, $H = \langle (12), (34) \rangle \le G$ egy Klein-csoport, és tekintsük az alábbi $\rho$ reprezentációt a $W = \mathbb{C}$ vektortéren:

$$\rho(h)(\alpha) = \begin{cases} -\alpha & \text{ha } h = (12) \\ \alpha & \text{egyébként .} \end{cases}$$

A $(\rho, W)$ reprezentáció nem terjed ki $S_4$-re, hiszen $S_4$-ben $(12)$ és $(34)$ konjugált elemek, így $S_4$ minden reprezentációjának a karaktere azonos értéket kell, hogy felvegyen rajtuk.

3.3.7. MEGJEGYZÉS Vegyük észre azonban a következőt: ha $(\rho, V)$ a $G$ csoport egy reprezentációja, $H \le G$, $W \subseteq V$ $\rho|_H$-invariáns altér, akkor tetszőleges $g \in G, h \in H$ esetén

$$\rho(gh)(W) = \rho(g)(\rho(h)(W)) = \rho(g)(W) ,$$

azaz a $\rho(g)(W) \leq V$ altér csak a $\mathcal{H}_g \stackrel{\text{def}}{=} gH$ mellékosztálytól függ. Esély van tehát arra, hogy a $H \leq G$ részcsoport egy $(\sigma, W)$ reprezentációjából elkészítsük $G$ egy reprezentációját a

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{\mathcal{H}_g \in G/H} W_{\mathcal{H}_g}$$

vektortéren, ahol $\mathcal{H}_g \subseteq G$ a $g$ elem $H$ szerinti baloldali mellékosztálya, $W_{\mathcal{H}_g}$ pedig a $W$ vektortér egy példánya. Amint a következő tételben látni fogjuk, ez teljes általánosságban megtehető.

3.3.8. FELADAT *Mutassuk meg, hogy az előző megjegyzés jelöléseivel*

$$\sum_{\mathcal{H}_g \in G/H} \rho(g)(W) \leq V$$

*egy $\rho$-invariáns altér, másképpen $(\rho, V)$ egy részreprezentációja.*

Mint eddig is, legyen $H \leq G$. Egy $\mathcal{T} = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq G$ részhalmazt a $H$ részcsoport szerinti baloldali reprezentánsrendszernek, röviden $H$ egy transzverzálisának hívunk, ha

$$G = {}^{r}_{i=1} x_i H \ .$$

Ha $\mathcal{T}$ a $H$ egy transzverzálisa, akkor $|\mathcal{T}| = |G : H|$.

3.3.9. TÉTEL *Tetszőleges $H \leq G$ csoportokra és $H$ bármely $\sigma : H \to \mathrm{End}(W)$ reprezentációjára izomorfizmus erejéig egyértelműen létezik $G$-nek egy olyan $\hat{\sigma} : G \to \mathrm{End}(V)$ reprezentációja, amelyre $W \leq V$ és $V$ mint $G$-modulus egyértelműen írható*

$$V = \bigoplus_{x_i \in \mathcal{T}} x_i(W)$$

*alakba, ahol $\mathcal{T} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ tetszőleges transzverzális.*

3.3.10. DEFINÍCIÓ *Az iménti tétel jelöléseivel $(\hat{\sigma}, V)$-t $G$-nek a $(\sigma, W)$-ből indukált reprezentációjának hívjuk, és $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$-val jelöljük.*

3.3.11. FELADAT *Lássuk be, hogy az indukált reprezentáció kanonikus izomorfizmus erejéig független a $H$-szerinti transzverzális választásától.*

BIZONYÍTÁS Válasszunk $G$-ben egy $H$ szerinti $\mathcal{T} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ transzverzálist, legyen továbbá

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{x_i \in \mathcal{T}} W_{x_i}$$

mint komplex vektortér, ahol $W_{x_i} \simeq W$ mint vektorterek minden $x_i \in \mathcal{T}$ esetén. Mivel $V$ a $W_{x_i}$ alterek direkt összege, minden $v \in V$ egyértelműen írható

$$v = \sum_{x_i \in \mathcal{T}} w_{x_i}$$

alakba.

Legyen most $g \in G$ tetszőleges, ekkor minden $x_1 \in \mathcal{T}$-hez van olyan $x_2 \in \mathcal{T}$, amelyre

$$gx_1 = x_2h$$

valamely $h \in H$ esetén, továbbá

$$g(x_1w_{x_1}) = (gg_{x_1})w_{x_1} = (x_2h)w_{x_1} = x_2(hw_{x_1}) .$$

Definiáljuk $G$ hatását a $V$ vektortéren az alábbi módon: bármely $g \in G$, $x_1 \in \mathcal{T}$, $w_{x_1} \in W$ esetén legyen

$$g(x_1w_{x_1}) = x_2(hw_{x_1})$$

ahol $gx_1 = x_2h$. Ezzel megadtunk egy $G$-ből $\operatorname{End} V$-be menő függvényt, amelyről azt kell még belátni, hogy csoportok közti homomorfizmus. Mivel az egységelem az identitás lineáris transzformációra képződik, elég lesz megmutatni, hogy a függvény szorzattartó. Rögzítsünk tetszőleges $g_1, g_2 \in G$ elemeket. Az igazolandó összefüggés

$$g_1(g_2(x_1w_{x_1})) = (g_1g_2)(x_1w_{x_1}) .$$

Az eddig elmondottak szerint

$$g_1x_1 = x_2h_1$$

és

$$g_2x_2 = x_3h_2$$

valamely (egyértelműen meghatározott) $h_1, h_2 \in H$ elemekre. Azonban mivel $G$ csoport,

$$\begin{aligned}(g_2g_1)x_1 &= g_2(g_1x_1)\\ &= g_2(x_2h_1)\\ &= (g_2x_2)h_1\\ &= (x_3h_2)h_1\\ &= x_3(h_2h_1) .\end{aligned}$$

Ily módon

$$\begin{aligned}g_2(g_1(x_1w_{x_1})) &= g_2(x_2(h_1w_{x_1}))\\ &= x_3((h_2h_1)w_{x_1})\\ &= (g_2g_1)(x_1w_{x_1}) .\end{aligned}$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

3.3.12. MEGJEGYZÉS Az indukált reprezentáció dimenziója

$$\dim \operatorname{Ind}_H^G(\rho) = |G:H| \cdot \dim \rho .$$

3.3.13. FELADAT *Legyen $G$ véges csoport, $H \leq G$, $(\rho, W), (\sigma, U) \in \mathbf{Rep}(H)$ a $H$ csoport reprezentációi, $\Phi : (\rho, W) \to (\sigma, U)$ reprezentációk közti leképezés. Találjunk alkalmas definíciót a $\mathrm{Ind}_H^G(\Phi)$ leképezésre, és igazoljuk, hogy a megfelelő választással*

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathbf{Rep}(H) \to \mathbf{Rep}(G)$$

*egy funktor (ld. 3.3.16. Megjegyzés).*

3.3.14. FELADAT *Legyen $G$ mint fent, $H \leq K \leq G$ részcsoportok. Igazoljuk, hogy*

$$\mathrm{Ind}_K^G \circ \mathrm{Ind}_H^K = \mathrm{Ind}_H^G$$

*mint $\mathbf{Rep}(H) \to \mathbf{Rep}(G)$ funktorok.*

3.3.15. PÉLDA Egy $G$ csoportnak nem minden reprezentációja áll elő mint valódi egy részcsoport egy reprezentációjának az indukáltja. Például a $G$ csoport triviális reprezentációja soha nem valódi részcsoportból indukált reprezentáció, mivel egy $H \leq G$ indukált reprezentáció dimenziója mindig osztható $|G : H|$-val.

3.3.16. MEGJEGYZÉS Az elsőre esetleg furcsának tűnő indukált reprezentáció egy egyszerű konceptuális leírását adhatjuk meg a $G$ csoport reprezentációi és a baloldali $\mathbb{C}G$-modulusok közti ekvivalencia segítségével.

Az általános konstrukció az alábbi: legyen $\phi : R \to S$ egy nem feltétlenül kommutatív gyűrűk közti homomorfizmus, $M$ egy baloldali $R$-modulus, $N$ egy baloldali $S$-modulus. Ekkor $N$ $\phi$ segítségével baloldali $R$-modulusnak is tekinthető: ha $r \in R$, $n \in N$, akkor legyen

$$r \cdot n \stackrel{\text{def}}{=} \phi(r) \cdot n \ .$$

$N$-et mint bal-$R$-modulust $N_R$-rel jelöljük.

Megfordítva valamelyest bonyolultabb a helyzet, de itt is megvalósítható, hogy $M$-ből egy $S$-modulust készítsünk, noha az alapjául szolgáló abel csoport nem lesz ugyanaz:

$$M_S \stackrel{\text{def}}{=} S \otimes_R M \ .$$

A most ismertetett két konstrukció speciális esetei a reprezentáció megszorítása, illetve az indukált reprezentáció képzése. Legyen ugyanis $i : H \hookrightarrow G$ a beágyazás, jelölje ugyancsak $i$ az általa indukált injektív $i : \mathbb{C}H \hookrightarrow \mathbb{C}G$ gyűrűhomomorfizmust. Ha $M$ egy bal-$\mathbb{C}G$-modulus, amit $G$ egy $(\rho, V)$ lineáris reprezentációjának felel meg, akkor

$$\mathrm{Res}_H^G(\rho) = M_{\mathbb{C}H} \ ,$$

ha $N$ egy bal-$\mathbb{C}H$-modulus, ami $H$ egy $(\sigma, W)$ reprezentációjának felel meg, akkor

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = N_{\mathbb{C}G} \ .$$

Röviden, az indukált reprezentációt a

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} N$$

formulával adhatjuk meg. Ha $\phi : N_1 \to N_2$ $\mathbb{C}H$-modulusok közti leképezés, akkor

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{C}G} \otimes \phi : \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} N_1 \longrightarrow \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} N_2$$

adja meg az indukált reprezentációk közt menő $\mathrm{Ind}_H^G(\phi)$ morfizmust.

3.3.17. FELADAT *Az eddigi jelölések megtartásával igazoljuk, hogy*

$$\mathrm{Ind}_H^G(\gamma_H) \simeq \gamma_G \ ,$$

*ahol $\gamma_H$ és $\gamma_G$ a $H$, illetve $G$ csoportok reguláris reprezentációit jelölik. Speciálisan, mutassuk meg, hogy a $\gamma_G$ reguláris reprezentációt az $1_G$ triviális részcsoport triviális reprezentációjából tudjuk indukálni.*

Az alábbiakban ismertetjük az indukált reprezentációk számunkra fontos tulajdonságait.

3.3.18. ÁLLÍTÁS *Legyenek $H \le G$ véges csoportok, $(\sigma, W) \in \mathbf{Rep}(H)$, $(\rho, U) \in \mathbf{Rep}(G)$ véges-dimenziós reprezentációk. Ekkor tetszőleges $\Phi : (\sigma, W) \to (\mathrm{Res}_H^G(\rho), U)$ reprezentációk közti morfizmus egyértelműen terjed ki egy*

$$\widetilde{\Phi} : (\mathrm{Ind}_H^G(\sigma), W) \longrightarrow (\rho, U)$$

*G-modulushomomorfizmussá; továbbá az így kapott*

$$\mathrm{Hom}_H((\sigma, W), (\mathrm{Res}_H^G(\rho), U)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G((\mathrm{Ind}_H^G(\sigma), W), (\rho, U))$$

*hozzárendelés egy $\mathbb{C}$-vektorterek közti izomorfizmus.*

BIZONYÍTÁS Amint azt az imént láttuk, a $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ reprezentációhoz tartozó vektortér

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\mathcal{H} \in G/H} W_{\mathcal{H}} \ ,$$

ahol $W \simeq W_{\mathcal{H}}$ minden $\mathcal{H} \in G/H$ esetén. Ha $g_{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{H}$ mellékosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\widetilde{\Phi}$-t az alábbi módon definiáljuk a $W_{\mathcal{H}}$ altéren:

$$\begin{tikzcd} W_{\mathcal{H}} \arrow[r, "\sigma(g_{\mathcal{H}})^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "\widetilde{\Phi}|_{W_{\mathcal{H}}}"'] & W \arrow[r, "\Phi"] & U \arrow[r, "\sigma g_{\mathcal{H}}"] & U \end{tikzcd} .$$

Mivel a $\Phi$ morfizmus $H$-lineáris, $\widetilde{\Phi}$ független a mellékosztályreprezentánsok választásától. A konstrukcióból rögtön adódik, hogy a

$$\Phi \mapsto \widetilde{\Phi}$$

hozzárendelés $\mathbb{C}$-lineáris.

Még tartozunk annak az igazolásával, hogy $\Phi \mapsto \widetilde{\Phi}$ vektortérizomorfizmus. Vegyük észre, hogy a $\sigma(g_{\mathcal{H}})$ lineáris transzformációk invertálhatók, ezért $\Phi = 0$ pontosan akkor, ha $\widetilde{\Phi} = 0$.

Másrészt ha $\Psi \in \mathrm{Hom}_G((\mathrm{Ind}_H^G(\sigma), W), (\rho, U))$, akkor $\Psi = \widetilde{\Psi|_{W_H}}$, tehát a hozzárendelés szürjektív is egyben. Ezzel az állítást beláttuk. □

3.3.19. FELADAT *Mutassuk meg, hogy adott $H \leq G$ esetén a*

$$\mathrm{Res}_H^G : \mathbf{Rep}(G) \longrightarrow \mathbf{Rep}(H)$$

*és*

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathbf{Rep}(H) \longrightarrow \mathbf{Rep}(G)$$

*funktorok egymás adjungáltjai.*

3.3.20. FELADAT *A fenti jelölésekkel igazoljuk, hogy*

$$\rho \otimes \mathrm{Ind}_H^G(\sigma) \simeq \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(\rho) \otimes \sigma) .$$

3.3.21. TÉTEL (FROBENIUS RECIPROCITÁS) *Legyenek $H \leq G$ véges csoportok, $(\sigma, W)$ $H$-nak, $(\rho, V)$ pedig $G$-nek egy reprezentációja. Ekkor*

$$\langle \chi_{\mathrm{Ind}\,\sigma}, \chi_\rho \rangle_G = \langle \chi_\sigma, \chi_{\mathrm{Res}\,\rho} \rangle_H$$

*az osztályfüggvények terén értelmezett*

$$\langle \phi, \xi \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\xi(g)}$$

*skalárszorzattal.*

BIZONYÍTÁS A tétel a 3.3.18. Állítás karakterekre történő lefordítása a 3.1.49. Állítás segítségével. □

3.3.22. ÁLLÍTÁS *Az indukált reprezentáció konstrukciójából látható, hogy az indukált reprezentáció képzése felcserélhető direkt összegekkel. Vagyis, ha $H \leq G$ véges csoportok, $(\rho, V) = \oplus_{i \in I}(\rho_i, W_i)$ reprezentációk véges direkt összege, akkor*

$$\mathrm{Ind}_H^G(\rho, V) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Ind}_H^G(\rho_i, W_i) .$$

BIZONYÍTÁS Közvetlen számolással adódik az indukált reprezentáció definíciójából, de a 3.3.16. Megjegyzésből és a tenzorszorzatnak a direkt összeggel vaó felcserélhetőségéből is rögtön következik. □

3.3.23. TÉTEL (INDUKÁLT REPREZENTÁCIÓK KARAKTEREI) *A fenti jelölések megtartása mellett legyen $\mathcal{C}$ A $G$ csoport egy konjugáltosztálya, amely $H$-ba eső részének konjugáltosztályokra történő felbontása*

$$\mathcal{C} \cap H = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_t .$$

*Ekkor*

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(\sigma, W)}(\mathcal{C}) = |G : H| \cdot \sum_{i=1}^{t} \frac{|\mathcal{C}_i|}{|\mathcal{C}|} \chi_{(\sigma, W)}(\mathcal{C}_i) .$$

BIZONYÍTÁS A lényegi megfigyelés az, hogy tetszőleges $g \in G$ esetén a $g$ elem az $W_{\mathcal{H}}$ alteret a $W_{g\mathcal{H}}$ altérre képezi le. Ennek megfelelően a $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)}$ karakter kiszámításában azok a $H$ szerinti mellékosztályok vesznek részt, amelyekre

$$g\mathcal{H} = \mathcal{H} ,$$

vagyis $a^{-1}ga \in H$ valamely $a \in \mathcal{H}$ elemre. Ebből következik, hogy az iménti esetben

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(\sigma,W)}(g) = \sum_{g\mathcal{H}=\mathcal{H}} \chi_{(\sigma,W)}(a^{-1}ga) .$$

A konkrét formula a konjugáltosztályok elemeinek megszámlálásából adódik. □

3.3.24. FELADAT *(Fourier-transzformáció) Legyen $G$ véges csoport, $(\rho,V) \in \mathbf{Rep}(G)$ egy reprezentáció, $f : G \to \mathbb{C}$ egy tetszőleges függvény $G$-n. Ekkor az $f$ függvény $\widehat{f}$* Fourier-transzformált*ját az alábbi módon definiáljuk:*

$$\widehat{f}(\rho) \stackrel{def}{=} \sum_{g\in G} f(g)\cdot\rho(g) \quad \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) .$$

1. *Adjunk példát arra, amikor $f \not\equiv 0$, és $\widehat{f} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ nem invertálható.*

2. *Legyen $G = S_3$, $(\rho,V)$ az irreducibilis alternáló reprezentáció. Számítsuk ki a $\mathrm{sgn} : S_3 \to \mathbb{C}$ függvény Fourier-transzformáltját.*

3. *Két $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ függvény* konvolúció*ját a következőképpen értelmezzük:*

$$(f_1 \star f_2)(g) \stackrel{def}{=} \sum_{g'\in G} f_1(g')\cdot f_2((g')^{-1}g) .$$

*Igazoljuk, hogy*

$$\widehat{f_1\star f_2}(\rho) = \widehat{f_1}(\rho)\cdot\widehat{f_2}(\rho) .$$

4. *(Fourier-inverzió) Mutassuk meg, hogy*

$$f(g) = \frac{1}{|G|}\cdot\sum_{(\rho,V_\rho)} \dim V_\rho\cdot \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})\cdot\widehat{f}(\rho)) ,$$

*ahol az összegzés $G$ irreducibilis reprezentációin fut végig.*

5. *(Plancherel-formula) Legyenek $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ függvények. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{g\in G} f_1(g^{-1})\cdot f_2(g) = \frac{1}{|G|}\cdot\sum_{(\rho,V_\rho)} \dim V_\rho\cdot\mathrm{Tr}(\widehat{f_1}(\rho)\cdot\widehat{f_2}(\rho)) ,$$

*ahol a jobboldali összegzés ismét csak $G$ irreducibilis reprezentációin fut végig.*

Az érdeklődő olvasó számára további részletek és egy tömör, jól használható leírás található a [38] forrás 3., 7., és 8. fejezeteiben, a Fourier-transzformáció iránt érdeklődőknek pedig a [41] könyvet ajánljuk.

## 3.4. A szimmetrikus csoportok irreducibilis reprezentációi

Az előkészítő fejezetek után eleget tudunk ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a szimmetrikus csoportok irreducibilis reprezentációit. Egy korábbi észrevételünk (3.1.35. Megjegyzés), hogy egy $G$ csoport irreducibilis reprezentációi lényegében (kategóriák ekvivalenciája erejéig) nem mások, mint a $\mathbb{C}G$ csoport algebra minimális balideáljai.

Esetünkben tehát a $\mathbb{C}S_n$ csoportalgebra minimális balideáljaira vagyunk kíváncsiak; ezeket fogjuk most explicit módon leírni. Munkánk során támaszkodni fogunk a partíciókalkulus és a szimmetrikus függvények terén szerzett ismereteinkre.

Az alapvető ötlet az, hogy $S_n$ bizonyos speciális részcsoportjaiból fogunk balideálokat konstruálni, amely részcsoportokat az $1,\ldots,n$ számok partíciói segítségével határozzuk meg.

3.4.1. DEFINÍCIÓ *Legyen $\lambda$ az $n$ szám tetszőleges partíciója, $T$ egy tetszőleges $\lambda$ alakú tabló. Tekintsük az $S_n$ szimmetrikus csoport alábbi részcsoportjait.*

$$P_\lambda = P_T \stackrel{def}{=} \{\, \sigma \in S_n \mid \sigma \textit{ megőrzi } T \textit{ minden sorát} \,\}$$

*a $\lambda$ partíció* sorcsoportja,

$$Q_\lambda = Q_T \stackrel{def}{=} \{\, \sigma \in S_n \mid \sigma \textit{ megőrzi } T \textit{ minden oszlopát} \,\}$$

*pedig a $\lambda$-hoz tartozó* oszlopcsoport.

3.4.2. MEGJEGYZÉS A $P_T, Q_T \leq S_n$ részcsoportok csak $\lambda$-tól függenek, a $T$ tabló választásától nem, ezért $\lambda$ partíciótól függő invariánsok, és ennek megfelelően is fogjuk jelölni őket.

A sor- illetve oszlopcsoportok jelöléséből gyakran elhagyjuk a $\lambda$ indexet, ha az a szövegkörnyezetből egyértelmű.

Az $S_n$ részcsoportjaiból a $\mathbb{C}S_n$ balideáljaiba való átmenetet az adott részcsoportok elemeinek a $\mathbb{C}S_n$-beli összegzésével érjük el.

3.4.3. DEFINÍCIÓ

$$a_\lambda \stackrel{def}{=} \sum_{\sigma\in P_\lambda} e_\sigma,$$
$$b_\lambda \stackrel{def}{=} \sum_{\sigma\in Q_\lambda} sgn(\sigma) e_\sigma$$

*ahol $sgn(\sigma)$ a $\sigma$ permutáció előjele.* [3]

Legyen most $V$ tetszőleges véges-dimenziós komplex vektortér, amelynek $n$-edik $V^{\otimes n}$ tenzorhatványán $S_n$ a tényezők permutálásával hat. Vizsgáljuk meg, mi a hatása az $a_\lambda, b_\lambda$ elemeknek a $V^{\otimes n}$ tenzorhatványon. Láthatóan $a_\lambda$-nak mint $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$-beli endomorfizmusnak a képe

$$\mathrm{im}\, a_\lambda = \mathrm{Sym}^{\lambda_1} \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_k} \subseteq V^{\otimes n} .$$

Hasonlóképpen, ha $\mu = \lambda'$ a $\lambda$ partíció konjugáltja, akkor

$$\mathrm{im}\, b_\lambda = \wedge^{\mu_1} V \otimes \wedge^{\mu_2} V \otimes \cdots \otimes \wedge^{\mu_k} V \subseteq V^{\otimes n} .$$

3.4.4. DEFINÍCIÓ *A fenti jelölésekkel legyen*

$$c_\lambda \stackrel{def}{=} a_\lambda \cdot b_\lambda \in \mathbb{C}S_n$$

*a $\lambda$ partícióhoz tartozó* Young-szimmetrizátor*; a $\mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda \leq \mathbb{C}S_n$ balideált pedig jelölje $V_\lambda$.*

3.4.5. MEGJEGYZÉS Az $\mathrm{im}\, c_\lambda \leq V^{\otimes n}$ altér $V^{\otimes n}$ egy rész-$\mathbb{C}S_n$-modulusa, azaz $S_n$ egy reprezentációja.

3.4.6. PÉLDA Nézzük meg az egyik legegyszerűbb esetet: legyen $\lambda = (n)$, az egy sorból álló partíció. Ekkor

$$P_\lambda = S_n \; , \; Q_\lambda = 1 \; ,$$

ennek megfelelően

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \; , \; b_\lambda = e_1 \; , \; c_\lambda = a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \; .$$

A $c_\lambda \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ endomorfizmus képe a szimmetrikus tenzorok altere.

3.4.7. PÉLDA Válasszuk most a másik szélső esetet: legyen $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$, azaz álljon a $\lambda$ partíció egy oszlopból. Ekkor

$$P_\lambda = 1 \; , \; Q_\lambda = S_n \; ,$$

és

$$a_\lambda = e_1 \; , \; b_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma \; , \; c_\lambda = b_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma \; .$$

Ebben az esetben $\mathrm{im}\, c_\lambda$ az alternáló tenzorokból áll.

A $c_\lambda$ elemek kitüntetett szerepet játszanak mind a szimmetrikus, mind az általános lineáris csoportok reprezentációelméletében. Itt csak a szimmetrikus csoportokkal foglalkozunk, az általános lineáris csoportok irreducibilis reprezentációival a Schur-funktorokról szóló fejezetben fogunk megismerkedni. A szimmetrikus csoportok esetében az alapvető eredmény az alábbi.

3.4.8. TÉTEL *Legyen $n$ tetszőleges pozitív egész, $\lambda$ az $n$ szám egy partíciója. Ekkor*

1. *$c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ egy alkalmas $n_\lambda$ pozitív egészre;*
2. *$V_\lambda$ az $S_n$ csoport egy irreducibilis reprezentációja;*
3. *$S_n$ minden irreducibilis reprezentációja előáll $V_\lambda$ alakban pontosan egy $\lambda$ partícióra.*

3.4.9. PÉLDA Vegyük ismét a $\lambda = (n)$ esetet. Ekkor
$$V_\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot \sum_{\sigma\in S_n} e_\sigma = \mathbb{C} \cdot \sum_{\sigma\in S_n} e_\sigma \ .$$
Mivel minden $\sigma \in S_n$ esetén
$$e_\tau \cdot \sum_{\sigma\in S_n} e_\sigma = \sum_{\sigma\in S_n} e_\sigma \ ,$$
$V_{(n)}$ a triviális reprezentáció.

3.4.10. PÉLDA Másik gyakran idézett példánk a $\lambda = (1,1,\ldots,1)$ partíció. Ebben az esetben
$$c_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma \ ,$$
így
$$V_\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda = \mathbb{C} \cdot \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma \ .$$
Mivel tetszőleges $\tau \in S_n$ esetén
$$e_\tau \cdot \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma = \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma \ ,$$
$V_{(1,1,\ldots,1)}$ az alternáló reprezentáció.

3.4.11. PÉLDA Legyen $\lambda = (2,1)$. A $(2,1)$ partícióhoz tartozó sor- és oszlopcsoportok:
$$P_\lambda = \{1,(12)\} \ , \ Q_\lambda = \{1,(13)\} \ ,$$
ezért
$$c_\lambda = (e_1 + e_{(12)})(e_1 - e_{(13)}) = e_1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)} \in \mathbb{C}S_n \ .$$
Ellenőrizhető, hogy $V_{(2,1)}$ egy bázisa $c_{(2,1)}, (13) \cdot c_{(2,1)}$ és $V_{(2,1)}$ az $S_3$ szimmetrikus csoport standard reprezentációja.

A 3.4.8. Tétel bizonyításának lelke az $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \in \mathbb{C}S_n$ elemek viselkedésének ismerete a csoportalgebrában. Az alábbi lemmák összefoglalják a szükséges ismereteket.

3.4.12. LEMMA *Legyen $\lambda \vdash n$. Minden $p \in P_\lambda$ és $q \in Q_\lambda$ esetén*

1. $p \cdot a_\lambda = a_\lambda \cdot p = a_\lambda$,
2. $sgn(q) \cdot q \cdot b_\lambda = b_\lambda \cdot sgn(q) \cdot q = b_\lambda$,
3. $p \cdot c_\lambda \cdot sgn(q) \cdot q = c_\lambda$ *és skalárral való szorzás erejéig $c_\lambda$ az egyetlen ilyen elem $\mathbb{C}S_n$-ben.*

3.4.13. LEMMA *Tetszőleges $x \in \mathbb{C}S_n$ esetén*
$$c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda \ ,$$
*továbbá ha $\mu < \lambda$ a lexikografikus rendezésben, akkor*
$$a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0 \ .$$

Mielőtt a lemmákat belátnánk, nézzük meg, hogy miképpen tudjuk segítségükkel a 3.4.8. Tételt bebizonyítani.

BIZONYÍTÁS (3.4.8. Tétel) Rögzítsük a $\lambda$ partíciót egyszer s mindenkorra, így elhagyhatjuk az indexekből.

Először is, vegyük észre, hogy ha egy permutáció $\lambda$ sorait és oszlopait is fixen hagyja, akkor egyik elemet sem mozdítja meg, így ez a permutáció az identitás kell, hogy legyen. Azaz

$$P \cap Q = 1 \ .$$

Emiatt $|PQ| = |P| \cdot |Q|$, és minden $\sigma \in S_n$ legfeljebb egyféleképpen írható $\sigma = pq$, $p \in P, q \in Q$ alakba; ezért

$$c = \sum_{\sigma = pq} \pm e_\sigma \ ,$$

speciálisan $e_1$ együtthatója $+1$ (mivel az egységelem a két részcsoport egységelemeinek szorzataként áll elő).

Először lássuk be, hogy $V_\lambda$ irreducibilis reprezentáció. A 3.4.13. Lemma szerint

$$c_\lambda V_\lambda = c_\lambda (\mathbb{C}S_n) c_\lambda \subseteq \mathbb{C}c_\lambda \ ,$$

ahol ez utóbbi vektortér egydimenziós. Ha $W \subseteq V_\lambda$ egy részreprezentáció, akkor

$$c_\lambda W \subseteq c_\lambda V_\lambda \subseteq \mathbb{C}c_\lambda \ ,$$

így $c_\lambda W = 0$ vagy $c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$.

Az első esetben

$$W \cdot W \subseteq (\mathbb{C}S_n c_\lambda) \cdot W = (\mathbb{C}S_n) \cdot (c_\lambda W) = 0 \ .$$

Minden $\phi : \mathbb{C}S_n \to W$ lineáris vetítést egy $\mathbb{C}S_n$-beli idempotens $d_\phi$ elemmel való jobbszorzás ír le, ebben az esetben

$$d_\phi = d_\phi^2 = 0 \ ,$$

ezért $W = 0$.

Ha $c_\lambda W = \mathbb{C}c_\lambda$, akkor

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \mathbb{C}S_n c_\lambda = \mathbb{C}S_n c_\lambda c_\lambda = (\mathbb{C}S_n c_\lambda)(\mathbb{C}S_n c_\lambda) \\ &= (\mathbb{C}S_n c_\lambda) c_\lambda W = \mathbb{C}S_n c_\lambda W \subseteq W \ , \end{aligned}$$

vagyis $V_\lambda = W$. Megállapíthatjuk tehát, hogy a $V_\lambda$ reprezentációk irreducibilisek.

Következőként igazoljuk, hogy különböző partíciókhoz tartozó irreducibilis reprezentációk nem izomorfak. Legyen $\lambda > \mu$ a lexikografikus rendezésben. Ekkor

$$c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda \neq 0 \ ,$$

azonban

$$c_\lambda V_\mu = c_\lambda \cdot \mathbb{C}S_n \cdot c_\mu = 0 \ ,$$

tehát $V_\lambda \not\simeq V_\mu$, amint azt állítottuk.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ ahol $n_\lambda$ pozitív egész szám. Ennél egy kicsit többet fogunk megmutatni, nevezetesen azt, hogy

$$n_\lambda = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda} .$$

Legyen ugyanis $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}S_n)$ a $c_\lambda$-val való jobbszorzás mint lineáris endomorfizmus. Ekkor

$$\phi|_{V_\lambda} = n_\lambda \,\mathrm{Id}$$

és

$$\phi|_{\mathrm{Ker}(c_\lambda)} = 0 ,$$

tehát

$$\mathrm{Tr}(\phi) = n_\lambda \cdot \dim V_\lambda .$$

Azonban $\mathrm{Tr}(\phi) = n!$, mivel $e_g$ együtthatója $e_g c_\lambda$-ban 1. Ezért

$$n_\lambda = \frac{\mathrm{Tr}(\phi)}{\dim V_\lambda} = \frac{n!}{\dim V_\lambda}$$

amint azt állítottuk.

Ezzel beláttuk, hogy van legalább annyi irreducibilis reprezentációja $S_n$-nek, amennyi partíciója $n$-nek. Ez viszont megegyezik $S_n$ konjugáltosztályainak a számával, amiből következik, hogy $S_n$ összes irreducibilis reprezentációját megkonstruáltuk. □

BIZONYÍTÁS (3.4.12. Lemma) Az első két állítás és a harmadik állítás első fele azonnal következik a megfelelő elemek definíciójából.

A skalárszorzó erejéig való egyértelműséget az alábbi módon láthatjuk be. Tegyük fel, hogy a

$$\sum_g n_g e_g$$

elemre teljesül a (3)-beli feltétel. Ekkor minden $g \in S_n, p \in P_\lambda, q \in Q_\lambda$ esetén

$$n_{pgq} = \mathrm{sgn}(q) n_g ,$$

speciálisan $n_{pq} = \mathrm{sgn}(q) n_1$. Elég tehát belátni, hogy $n_g = 0$ minden $g \notin P_\lambda Q_\lambda$ esetén.

Egy ilyen $g$-re — azaz amelyre $g \notin P_\lambda Q_\lambda$ — elég egy olyan $t \in S_n$ transzpozíciót találni, amelyre

$$p = t \in P_\lambda , \; q = g^{-1} t g \in Q_\lambda ,$$

hiszen ekkor

$$g = pgq \;\text{ és így }\; n_g = -n_g ,$$

azaz $n_g = 0$. Ebben segít nekünk a 3.4.14. Lemma.

Legyen $t$ a Lemmában szereplő két számot felcserélő transzpozíció. Rögtön látszik, hogy megfelel a vele szemben támasztott követelményeknek. □

3.4.14. LEMMA *Ha $T' = gT$ az a tabló, amelyet úgy kapunk, hogy az $i$ elem előfordulását $T$-ben $g(i)$-vel kicseréljük, akkor van két (különböző) pozitív egész, amelyek $T$-nek ugyanabban a sorában és $T'$-nek ugyanabban az oszlopában vannak.*

BIZONYÍTÁS Amennyiben nincs ilyen számpár, akkor legyen

$$p_1 \in P_\lambda \text{ és } q_1' \in Q_\lambda' = gQ_\lambda g^{-1}$$

úgy, hogy $p_1 T$ és $q_1' T'$ első sorai megegyeznek. Ezt a műveletet megismételve a tablók maradék részére végeredményül kapunk egy

$$p \in P_\lambda \, , \; q' \in Q_\lambda'$$

elempárt, amelyekre $pT = q'T'$. Ekkor viszont

$$pT = q'gT \, ,$$

így $p = q'g$ és ezért $g = pq$, ahol $q = g^{-1}(q')^{-1} g \in Q_\lambda$. □

BIZONYÍTÁS (3.4.13. lemma) A második állítás igazolására legyen először $x = g \in S_n$. Idézzük fel, hogy ha $b_\mu$ a $T'$ tablóból gyártott elem, akkor $gb_\mu g^{-1}$ a $gT'$ tabló oszlopcsoportjának az elemeinak az előjeles összege. Elég tehát belátni, hogy $a_\lambda \cdot b_\mu = 0$.

Ha $\lambda > \mu$, akkor van két szám, ami $T$-nek ugyanabban a sorában, $T'$-nek pedig ugyanabban az oszlopában van. Ha $t$ az ezen két szám cseréjét végrehajtó transzpozíció, akkor

$$a_\lambda t = a_\lambda \, , \; tb_\mu = -b_\mu \, ,$$

tehát

$$a_\lambda b_\mu = a_\lambda t t b_\mu = -a_\lambda b_\mu$$

azaz $a_\lambda b_\mu = 0$. Az első állítás a 3.4.12. Lemma következménye. □

## 3.5. A Frobenius-féle karakterformula

Miután meghatároztuk a szimmetrikus csoport irreducibilis reprezentációit, a következő fontos lépés ezen irreducibilis reprezentációk karaktereinek kiszámítása. Most ezt fogjuk megtenni; bebizonyítunk egy Frobeniustól származó képletet, ami megadja egy irreducibilis reprezentáció karakterének értékét $S_n$ egy adott konjugáltosztályán. A bizonyításban nagy szerepe lesz a szimmetrikus függvényekről szerzett ismereteinknek.

Ismert, hogy $S_n$ konjugáltosztályait a ciklusszerkezetük egyértelműen meghatározza; pontosabban, egy konjugáltosztály az összes adott ciklusszerkezetű permutációból áll. Legyen $\alpha$ egy ciklusszerkezet, azaz egy $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ természetes számokból álló szám $n$-es, ahol

$$\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n \, .$$

Az $\alpha$ sorozat azokat a permutációkat írja le, amelyekben $\alpha_1$ darab 1-ciklus, $\alpha_2$ darab 2-ciklus van és így tovább. Az $S_n$ csoport konjugáltosztályait a fenti típusú $\alpha$ sorozatokkal fogjuk indexelni; az $\alpha$ ciklusszerkezetű permutációkból álló osztály jele $\mathcal{C}_\alpha$.

Rögzítsünk egy $|\lambda| = n$ partíciót, legyen továbbá $k$ olyan természetes szám, amely legalább akkora, mint $\lambda$ sorainak a száma (például $k = n$ mindig jó választás). Tekintsük az

$$R = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_k]] \supseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$$

formális hatványsor gyűrűt. Jelölje

$$\begin{aligned} p_\lambda(x) &= \prod_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}(x) \text{ és} \\ \Delta(x) &= \prod_{1 \le i < j \le k} (x_i - x_j) \,, \end{aligned}$$

ahol $x = (x_1, \ldots, x_k)$.

3.5.1. MEGJEGYZÉS Emlékeztetőül,

$$p_d(x_1, \ldots, x_k) = x_1^d + \cdots + x_m^d \,,$$

$$\Delta(x_1, \ldots, x_k) = V(x_1, \ldots, x_k)$$

pedig a $k$-változós Vandermonde-determináns. A $k = 1$ speciális esetben $\Delta(x_1) = 1$.

Amint az a szimmetrikus polinomokról szóló fejezetben szokás volt, tetszőleges $f(x) \in R$, $l = (l_1, \ldots, l_k) \in \mathbb{N}^k$ esetén

$$[f(x)]_l \stackrel{\text{def}}{=} x^l \text{ együtthatója } f\text{-ben} \,.$$

Ismét csak megtartva az említett fejezet konvencióit, adott $|\lambda| = n$ partícióra legyen

$$\tilde{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1 + k - 1, \lambda_2 + k - 2, \ldots, \lambda_k) \,.$$

Látható, hogy $\tilde{\lambda}$ szintén egy partíció.

A szimmetrikus csoportok karaktereire vonatkozó fő eredményünk az alábbi.

3.5.2. TÉTEL (FROBENIUS-FÉLE KARAKTERFORMULA) *Az iménti jelölésekkel*

$$\chi_\lambda(C_\alpha) = \left[ \Delta(x) \prod_{j=1}^{n} p_j(x)^{\alpha_j} \right]_{\tilde{\lambda}} \,.$$

Mielőtt igazoljuk a tételt, nézzük meg pár példán a működését.

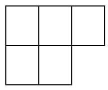
3.5.3. PÉLDA Legyen $n$ tetszőleges, $\lambda = (n)$; ekkor $\tilde{\lambda} = (n)$, $k = 1$-nek választható, legyen továbbá $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tetszőleges ciklusszerkezet. Mivel $k = 1$, összesen egy változónk van, $x_1$. Nézzük meg, mint mond a Frobenius-képlet:

$$\begin{aligned} \chi_{(n)}(C_\alpha) &= \left[ 1 \cdot \prod_{j=1}^{m} ((x_1)^j)^{\alpha_j} \right]_{(n)} \\ &= [x_1^n]_{(n)} \\ &= 1 \,, \end{aligned}$$

ahol a középső egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy $\sum_{j=1}^{m} i\alpha_i = n$. Az eredmény pontosan az, amint vártunk, mivel az $(n)$ partícióhoz a triviális reprezentáció tartozik, amelynek a karaktere az azonosan 1 függvény.

3.5.4. FELADAT *Tetszőleges $n$ mellett számítsuk ki a $\lambda = (1,\dots,1)$ partícióhoz tartozó karaktert a Frobenius-formula felhasználásával.*

3.5.5. PÉLDA Legyen $n = 5$, $\lambda = (3,2)$, $\alpha = (0,1,1,0,0)$, $k = 2$. Azaz, a



partícióhoz tartozó irreducibilis reprezentáció karakterének értékét fogjuk kiszámolni az egy transzpozícióból és egy hármas ciklusból álló permutációk konjugáltosztályán. A tétel szerint

$$\begin{aligned}
\chi_{(3,2)}(C_\alpha) &= \left[\Delta(x)\prod_{j=1}^{n} p_j(x)^{\alpha_j}\right]_{(4,2)} \\
&= [\Delta(x)p_2(x)p_3(x)]_{(4,2)} \\
&= \left[(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2)(x_1^3+x_2^3)\right]_{(4,2)} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

3.5.6. FELADAT *A Frobenius-féle karakterformula segítségével számítsuk ki az $S_4$ szimmetrikus csoport $(2,2)$, illetve $(3,1)$ ciklusszerkezetekhez tartozó irreducibilis reprezentációk karaktereit.*

3.5.7. MEGJEGYZÉS Léteznek más módszerek is a szimmetrikus csoportok karaktereinek a meghatározására. Ilyen például az ún. Murnaghan–Nakayama-szabály (ld. [13, Problem 4.45]), ami rekurzív módon számolja ki a karaktereket. Ez utóbbi számítási szempontból hatékonyabb a Frobenius-képletnél.

3.5.8. KÖVETKEZMÉNY

$$\chi_{(n-1,1)}(C_\alpha) = \alpha_1 - 1\,.$$

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned}
\chi_{(n-1,1)}(C_\alpha) &= \left[\Delta(x)\prod_{j=1}^{n} p_j(x)^{\alpha_j}\right]_{(n,1)} \\
&= \left[(x_1-x_2)(x_1+x_2)^{\alpha_1}\dots(x_1^n+x_2^n)^{\alpha_n}\right]_{(n,1)}\,.
\end{aligned}$$

Mivel $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n$, $x_1^n x_2$ monomot csak úgy kaphatunk, hogy az első zárójelből $x_2$-t választunk, a többiből mind $x_1$-et, illetve ha az első zárójelből $x_1$-et választunk, ekkor azonban a második zárójelből az $x_2$-ben lineáris tagot kell választani, mindenhol máshol pedig az $x_1$ megfelelő hatványát.

Az első esetben az $x_1^n x_2$ monom együtthatója $-1$, a második esetben pedig $\alpha_1$ lesz. Ezzel a következményt beláttuk. □

3.5.9. FELADAT *Lássuk be az iménti érvelés megfelelő módosításával, hogy*

$$\chi_{(n-2,1,1)}(C_\alpha) = \tfrac{1}{2}(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)-\alpha_2 \,.$$

3.5.10. MEGJEGYZÉS A Frobenius-féle karakterformulát megfogalmazhatjuk Schur-polinomok segítségével is:

$$\prod_{j=1}^{n} p_j(x_1,\dots,x_k)^{\alpha_j} = \sum_{|\lambda|=n\ ,\ \lambda\text{-nak legfeljebb } k \text{ sora van}} \chi_\lambda(C_\alpha)s_\lambda \,.$$

Mielőtt a 3.5.2. Tételt igazoljuk, mutatunk egy további érdekes nem-triviális alkalmazást: kiszámoljuk segítségével a $V_\lambda$ irreducibilis reprezentációk dimenzióit.

3.5.11. ÁLLÍTÁS *Legyen* $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$ *az n szám egy partíciója, ekkor*

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\lambda_1!\dots\lambda_k!}\prod_{1\leq i<j\leq k}(\lambda_i-\lambda_j)\,.$$

BIZONYÍTÁS Ismert, hogy egy reprezentáció (pontosabban a hozzá tartozó vektortér) dimenziója megegyezik a reprezentáció karakterével kiértékelve az identitás (egyelemű) konjugáltosztályán.

Mint általában tehát,

$$\dim V_\lambda = \chi_\lambda(C_{(n)})\,.$$

A 3.5.2. Tétel szerint

$$\dim V_\lambda = [\Delta(x)(x_1+\cdots+x_k)^n]_{(\tilde{\lambda})}\,,$$

ezt fogjuk most részletesen kiszámolni.

A jobboldalon szereplő első tényező-t, a $V(x_1,\dots,x_k)$ Vandermonde-determinánst kifejtve

$$\Delta(x) = \sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)x_k^{\sigma(1)-1}\cdot\dots\cdot x_1^{\sigma(k)-1}\,,$$

valamint a polinomiális tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$(x_1+\cdots+x_k)^n = \sum_{r_1,\dots,r_k,\sum_{i=1}^k r_i=n}\frac{n!}{r_1!\dots r_k!}x_1^{r_1}\dots x_k^{r_k}\,.$$

Ezek alapján $\Delta(x)(x_1+\cdots+x_k)^n$ -ben az $x^{\tilde{\lambda}}$ monom együtthatója

$$\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{n}{(\lambda_1-\sigma(k)+1)!\dots(\lambda_k-\sigma(1)+1)!}\,,$$

ahol $l_{k-i+1}-\sigma(i)+1\geq 0$ minden $1\leq i\leq k$ esetén. Utóbbi állítás helyességét az alábbi módon láthatjuk be: azt kell megvizsgálni, hogy

$$x_k^{\sigma(1)-1}\dots x_1^{\sigma(k)-1}\cdot x_1^{r_1}\dots x_k^{r_k}$$

mikor lesz egyenlő $x_1^{l_1}\dots x_k^{l_k}$-val. Ez pontosan akkor következik be, ha

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda_1 - \sigma(k) + 1 \\ &\vdots \\ r_k &= \lambda_k - \sigma(1) + 1 \end{aligned}$$

és ezek mind nemnegatívak.

Továbbmenve, $\Delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^n$ -ben az $x^{\tilde{\lambda}}$ monom együtthatója

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{n!}{(\lambda_1-\sigma(k)+1)!\dots(\lambda_k-\sigma(1)+1)!} \\ &= \frac{n!}{\lambda_1!\dots\lambda_k!} \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{k} \lambda_j(\lambda_j-1)\dots(\lambda_j-\sigma(k-j+1)+2) \\ &= \frac{n!}{\lambda_1!\dots\lambda_k!} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_k & \lambda_k(\lambda_k-1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1(\lambda_1-1) & \dots \end{vmatrix} \\ &= \frac{n!}{\lambda_1!\dots\lambda_k!} \prod_{1\le i<j\le k} (\lambda_i - \lambda_j)\,, \end{aligned}$$

ahol utolsó egyenlőséget oszlopredukció segítségével kaptuk. Ezzel az állítást beláttuk. □

3.5.12. FELADAT *Mutassuk meg, hogy* $\dim V_\lambda$ *megegyezik a* $\lambda$ *partíción megadható standard Young-tablók számával.*

A karakterformula bizonyításához még egy eszközre lesz szükségünk.

3.5.13. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ *az n szám egy tetszőleges partíciója. A hozzá tartozó úgynevezett* Young-részcsoport

$$S_\lambda \stackrel{def}{=} S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_k} \hookrightarrow S_n\,.$$

Legyen $U_\lambda$ az baloldali $\mathbb{C}S_n$-modulus, amely az $S_\lambda$ Young-részcsoport triviális reprezentációjáról indukált reprezentációnak felel meg. Az előző fejezet alapján könnyen látható, hogy

$$U_\lambda = \mathbb{C}S_n a_\lambda\,,$$

továbbá

$$V_\lambda \subseteq U_\lambda$$

hiszen $V_\lambda = \mathbb{C}S_n a_\lambda b_\lambda \simeq \mathbb{C}S_n b_\lambda a_\lambda \subseteq \mathbb{C}S_n a_\lambda = U_\lambda$. Jelölje $\eta_\lambda$ az $U_\lambda$ reprezentáció karakterét.

3.5.14. LEMMA *Az eddigi jelölésekkel*

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = \frac{1}{|C_\alpha|} \cdot \frac{n!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} \cdot \sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p_1}} r_{p_1}! \dots n^{r_{p_n}} r_{p_n}!}\,,$$

*ahol az összegzés minden olyan*

$$\{r_{pq} \mid 1 \le p \le k \,,\, 1 \le q \le n\}$$

*számhalmazra kiterjed, amelyre*

$$r_{1q} + \cdots + r_{kq} = \alpha_q$$

*és*

$$r_{p1} + 2r_{p2} + \cdots + nr_{pn} = \lambda_p$$

*minden* $1 \le q \le n$ *és* $1 \le p \le k$ *esetén.*

3.5.15. FELADAT *Igazoljuk, hogy*

$$|C_\alpha| = \frac{n!}{1^{\alpha_1}(\alpha_1)! \cdot \cdots \cdot n^{\alpha_n}(\alpha_n)!} \,.$$

BIZONYÍTÁS Az indukált reprezentációk karakterére vonatkozó képlet alapján

$$\eta_\lambda(C\alpha) = \frac{1}{|C_\alpha|} |S_n : S_\lambda| \cdot |C_\alpha \cap S_\lambda| \,.$$

Itt

$$|S_n : S_\lambda| = \frac{n!}{\lambda_1! \ldots \lambda_k!} \,,$$

$|C_\alpha \cap S_\lambda|$ kiszámítása valamennyivel több erőfeszítést igényel.

Írjuk fel $C_\alpha \cap S_\lambda$ $p$-edik komponenseinek az elemeit, mint $r_{p1}$ darab 1-ciklus, $r_{p2}$ darab 2-ciklus, stb. Ily módon

$$\begin{aligned}
|C_\alpha \cap S_\lambda| &= \sum_{\sum_p r_{pq} = \alpha_q \,,\, \sum_q q r_{pq} = \lambda_p} \left| \left\{ \sigma \mid S_{\lambda_p}\text{-ben } r_{pq} \text{ darab } q\text{-ciklus van} \right\} \right| \\
&= \sum_{\sum_p r_{pq} = \alpha_q \,,\, \sum_q q r_{pq} = \lambda_p} \frac{\lambda_1!}{1^{r_{11}} r_{11}! \ldots n^{r_{1n}} r_{1n}!} \cdots \frac{\lambda_k!}{1^{r_{k1}} r_{k1}! \ldots n^{r_{kn}} r_{kn}!} \\
&= \sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p_1}} r_{p_1}! \ldots n^{r_{p_n}} r_{p_n}!} \,,
\end{aligned}$$

ahol az összegzés azokon a

$$\{r_{pq} \mid 1 \le p \le k \,,\, 1 \le q \le n\}$$

számhalmazokon fut végig, amelyekre

$$r_{1q} + \cdots + r_{kq} = \alpha_q$$

és

$$r_{p1} + 2r_{p2} + \cdots + nr_{pn} = \lambda_p$$

minden $1 \le q \le n$ és $1 \le p \le k$ esetén. □

3.5.16. ÁLLÍTÁS

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = [p_\alpha]_\lambda ,$$

*azaz $x^\lambda$ együtthatója $p^\alpha$-ban.*

BIZONYÍTÁS Az előző lemma szerint

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = \frac{1}{|C_\alpha|} \cdot \frac{n!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_k!} \cdot \sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p_1}} r_{p_1}! \ldots n^{r_{p_n}} r_{p_n}!},$$

az ott említett indexhalmazra összegezve. Ebből kis egyszerűsítéssel azt kapjuk, hogy

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = \sum \prod_{q=1}^{n} \frac{\alpha_q!}{r_{1q}! \ldots r_{kq}!} ,$$

ahol az összegzés a korábbi indexhalmazra történik. Tekintsük most a

$$p_\alpha = (x_1 + \cdots + x_k)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x_1^n + \cdots + x_k^n)^{\alpha_n}$$

általánosított Newton-féle hatványösszegpolinomot. Ebben $x^\lambda$ együtthatója

$$\sum \prod_{q=1}^{n} \frac{\alpha_q!}{r_{1q}! \ldots r_{kq}!} .$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

BIZONYÍTÁS (Frobenius-féle karakterformula) Az eddigi jelölésekkel azt szeretnénk belátni, hogy

$$\chi_\lambda(C_\alpha) = [\Delta \cdot P^{(\alpha)}]_{\tilde{\lambda}} ,$$

illetve a 3.5.16. Állítás szerint

$$[p_\alpha]_\lambda = [\Delta \cdot p^{(\alpha)}]_{\tilde{\lambda}} .$$

Alkalmazzuk a szimmetrikus polinomok együtthatóiról szóló 2.5.5. Tételt a $p_\alpha$ általánosított hatványösszegpolinomokra: eszerint

$$[p_\alpha]_\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda} [\Delta \cdot p_\alpha]_{\tilde{\mu}} .$$

Mivel

$$K_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = \mu \\ 0 & \text{ha } \lambda < \mu , \end{cases}$$

ezért

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = [p_\alpha]_\lambda = [\Delta \cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}} + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} [\Delta \cdot p_\alpha]_{\tilde{\mu}} .$$

Ebből a 3.5.15. és a 2.5.8. Feladat felhasználásával az adódik, hogy

$$\frac{1}{n!}\sum_{\alpha}|C_\alpha|[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\mu}} = \delta_{\lambda\mu} ,$$

más szóval, hogy a

$$[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}$$

kifejezések mint osztályfüggvények kielégítik ugyanazokat a merőlegességi relációkat, mint az irreducibilis reprezentációk karakterei. Ebből az irreducibilis karakterek tulajdonságai miatt következik, hogy a $[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}$ osztályfüggvények az $S_n$ csoport irreducibilis reprezentációhoz tartozó karakterei.

Vegyük észre, hogy a Tétel állításának egy rész még hiányzik: meg kell mutatnunk azt is, hogy $[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}$ a $V_\lambda$-val jelölt irreducibilis reprezentációhoz tartozó karakter.

Ehhez tekintsük a $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ reprezentációkat. Láttuk, hogy $V_\lambda \subseteq U_\lambda$; ennél több is igaz, hiszen mint minden véges csoportnak, $S_n$-nek is minden reprezentációja teljesen reducibilis, ezért minden részreprezentáció direkt összeadandó.

Ezért

$$\eta_\lambda = \sum_{\mu} r_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

alakba írható, ahol az együtthatóknak teljesíteniük kell a $r_{\lambda\mu} \geq 0$ és $r_{\lambda\lambda} \geq 1$ feltételeket. Az

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = [p_\alpha]_\lambda = [\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}} + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\mu}}$$

egyenlőséggel összevetve az következik, hogy $[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}$ a $\chi_\mu$ karakterek $\mathbb{Z}$-együtthatós lineáris kombinációja[4]:

$$[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}} = \sum_{\mu} v_{\lambda\mu}\chi_\mu \qquad (v_{\lambda\mu}\in\mathbb{Z}) .$$

Láttuk, hogy a $[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}$ elemek ortonormált bázist alkotnak az osztályfüggvények terében, amiből az

$$1 = \langle[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}, [\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}}\rangle = \sum_{\mu} v_{\lambda\mu}^2$$

összefüggésre jutunk; ez viszont azt jelenti, hogy

$$[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}} = \pm\chi$$

az $S_n$ csoport valamely irreducibilis $\chi$ karakterére. A $\lambda$ partíciókra vonatkozó lexikografikus indukcióval tegyük fel, hogy

$$[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\nu}} = \chi_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{V_\nu}$$

minden $\nu < \lambda$ partíció esetén. Ekkor viszont az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned} \eta_\lambda(C_\alpha) &= [\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}} + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}[\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\mu}} \\ &= [\Delta\cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}} + \sum_{\mu} K_{\mu\lambda}\chi_\mu , \end{aligned}$$

[4] Egy csoport karaktereinek egészegyütthatós lineáris kombinációit *virtuális karakter*eknek hívjuk.

amiből
$$\eta_\lambda = \sum_\mu r_{\lambda\mu}\chi_\mu \qquad r_{\lambda\mu} \geq 0 \text{ és } r_{\lambda\lambda} \geq 1$$
és az irreducibilis karakterek lineáris függetlensége miatt
$$[\Delta \cdot p_\alpha]_{\tilde{\lambda}} = \chi_\lambda$$
következik. □

## 3.6. Schur-funktorok

A szimmetrikus csoportok reprezentációiról szerzett ismereteinket most komplex vektorterek $\mathrm{GL}(V)$ általános lineáris csoportjai reprezentációelméletének vizsgálatára fogjuk felhasználni. Mint általában, a fő feladat egy adott csoport irreducibilis reprezentációinak leírása, majd ezek multiplicitásainak meghatározása tetszőleges reprezentációban. Fontos tudni, hogy általában nem minden csoport teljesen reducibilis, azaz sokuknak van olyan reprezentációja, amely nem áll elő irreducibilis reprezentációk direkt összegeként.

Igaz azonban az alábbi.

3.6.1. TÉTEL *Legyen $V$ egy véges-dimenziók komplex vektortér. Ekkor* $\mathrm{GL}(V)$ *minden komplex lineáris reprezentációja teljesen reducibilis, azaz a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen felbomlik irreducibilis reprezentációk direkt összegére.*

BIZONYÍTÁS Egy geometriai jellegű bizonyítás található a [23] II. függelékében. □

Legyen $V$ egy $d$-dimenziós komplex vektortér. A $\mathrm{GL}(V)$ csoportnak konstrukciójából adódóan van egy
$$\rho : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$
természetes hatása $V$-n: tetszőleges $g \in \mathrm{GL}(V)$ és $v \in V$ esetén
$$\rho(g)(v) \stackrel{\text{def}}{=} gv\ .$$
Másképpen,
$$\rho = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(V)}\ .$$

Ez a csoporthatás természetes módon kiterjed $V$ összes tenzorhatványára. Ha $g \in GL(V)$, $v_1, \ldots, v_n \in V$, akkor a
$$\rho(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(g)(v_1) \otimes \cdots \otimes \rho(g)(v_n)$$
leképezés egy
$$\rho_n : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow GL(V^{\otimes n})$$
reprezentációt definiál. Az áttekinthetőség kedvéért gyakran a
$$g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$$
jelölést fogjuk használni, erre definíció szerint
$$g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = g.v_1 \otimes \cdots \otimes g.v_n\ .$$

3.6.2. FELADAT *Ellenőrizzük, hogy* $\rho_n : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^{\otimes n})$ *valóban a* $\mathrm{GL}(V)$ *csoport egy reprezentációja.*

Az $S_n$ szimmetrikus csoport természetes módon hat a $V^{\otimes n}$ vektortéren az indexek permutációjával. Ezt a

$$\pi_n : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes n})$$

hatást szokásunkkal és az imént tekintett $\mathrm{GL}(V)$-hatással ellentétben *jobboldali* hatásként fogjuk fel; ha $\sigma \in S_n$ és $v_1, \ldots, v_n$, akkor ismét csak az egyszerűség okán legtöbbször a

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n(\sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$$

jelölést alkalmazzuk. Ily módon $\pi_n$ az alábbi módon adható meg:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \ .$$

Egy fontos elemi tény, hogy a $\pi_n$ permutációreprezentáció felcserélhető a $\rho_n$ baloldali $\mathrm{GL}(V)$-hatással.

3.6.3. LEMMA *Tetszőleges* $g \in \mathrm{GL}(V)$, $\sigma \in S_n$ *és* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *esetén*

$$g.((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).\sigma) = (g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)).\sigma \ .$$

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned} g.((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).\sigma) &= g.(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) \\ &= (gv_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes (gv_{\sigma(n)}) \\ &= ((gv_1) \otimes \cdots \otimes (gv_n)).\sigma \\ &= (g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)).\sigma \ . \end{aligned}$$

Legyen $\lambda$ az $n$ szám egy partíciója, $c_\lambda \in \mathbb{C}S_n$ a hozzá tartozó Young-szimmetrizátor. A $c_\lambda$ elemek természetes módon $V^{\otimes n}$ egy endomorfizmusa (nem feltétlenül lesz invertálható lineáris transzformáció), ezek segítségével meg fogjuk adni $\mathrm{GL}(V)$ sok irreducibilis reprezentációját.

3.6.4. DEFINÍCIÓ *Az $n$ szám $\lambda$ partíciójához tartozó* Schur-funktor

$$\mathbb{S}_\lambda V \stackrel{def}{=} \operatorname{im} c_\lambda|_{V^{\otimes n}} \ .$$

*a* $\mathrm{GL}(V)$ *csoport egy reprezentációja*[5].

3.6.5. PÉLDA Első példaként vegyük a $\lambda = (n)$ partíciót. Amint azt korábban láttuk,

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \ ,$$

így

$$\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Sym}^n V \ .$$

3.6.6. PÉLDA Legyen $\lambda = (1,\dots,1)$ az $n$ darab 1-esből álló partíció. Ekkor

$$c_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma e_\sigma$$

és

$$\mathbb{S}_\lambda V = \bigwedge^n V\ .$$

3.6.7. PÉLDA Legyen most $\lambda = (2,1)$. Ebben az esetben

$$c_\lambda = 1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(123)}\ ,$$

ezért

$$\mathbb{S}_\lambda V = \operatorname{im} c_\lambda|_{V^{\otimes 3}}$$

$V^{\otimes 3}$ azon altere, amelyet a

$$v_1\otimes v_2\otimes v_3 + v_2\otimes v_1\otimes v_3 - v_3\otimes v_2\otimes v_1 - v_3\otimes v_1\otimes v_2$$

alakú vektorok feszítenek ki.

3.6.8. MEGJEGYZÉS Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$V^{\otimes 3} = \operatorname{Sym}^3 V \oplus \bigwedge^3 V \oplus \mathbb{S}_{(2,1)}\ .$$

3.6.9. MEGJEGYZÉS A Schur-funktorok definíciója során használt terminológia — noha a reprezentációelméleti irodalomban teljes mértékben megszokott, pontosításra szorul. A tulajdonképpeni funktor az

$$\mathbb{S}_\lambda : W \mapsto \mathbb{S}_\lambda W$$

hozzárendelés, amely a véges-dimenziós komplex vektorterek kategóriájából képez a $\mathbb{C}$-algebrák kategóriájába.

Természetesen ahhoz, hogy a $\mathbb{S}_\lambda$ funktor definiálva legyen, meg kell mondanunk, hogy mit rendeljen hozzá egy $\phi : V \to W$ lineáris leképezéshez. Ez nem lesz más, mint a

$$v_1\otimes\cdots\otimes v_n \mapsto \phi(v_1)\otimes\cdots\otimes\phi(v_n)$$

hozzárendelés kiterjesztése.

Vegyük észre, hogy $\mathbb{S}_\lambda V$ függ $V$-től. Például $\mathbb{S}_\lambda V = 0$, ha $\lambda$ sorainak száma nagyobb, mint $\dim V$.

Az ismertetett eljárás minden $G \leq \mathrm{GL}(V)$ lineáris csoportra alkalmazható. A $G = \mathrm{GL}(V)$ esetben a kapott reprezentációk irreducibilisek lesznek.

3.6.10. FELADAT *Mutassuk meg, hogy az iménti értelmezéssel $\mathbb{S}_\lambda$ valóban egy funktor.*

3.6.11. MEGJEGYZÉS Az alfejezet elején ismertetett módon minden $\phi \in \operatorname{End}(V)$ egyértelműen kiterjed $\mathbb{S}_\lambda V$ egy endomorfizmusává. Legyen

$$\chi_\lambda(g) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g)$$

ennek az endomorfimusnak a nyoma.

Tekintsük ismét a $\lambda = (n)$, $\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Sym}^n V$ esetet. Legyenek $g \in \mathrm{GL}(V)$ sajátértékei $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ (mivel az alaptest algebrailag zárt, minden endomorfizmusnak (multiplicitással számolva) pontosan $d = \dim V$ sajátértéke van).

3.6.12. ÁLLÍTÁS *A fenti jelölésekkel*

$$\chi_{(d)}(g) = h_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) ,$$

*ahol $h_n$ a megfelelő teljes szimmetrikus polinom.*

BIZONYÍTÁS Első lépésben tegyük fel, hogy $g \in \mathrm{GL}(V)$ diagonalizálható és $v_1, \ldots, v_d$ $V$-nek az a bázisa, amelyben $g = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ diagonális mátrix a sajátértékekkel mint főátlóbeli elemekkel.

Ekkor a

$$v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_n} = \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_n)}$$

elemek, ahol $1 \leq i_1, \ldots i_n \leq d$, $\mathrm{Sym}^n V$ egy bázisát alkotják. Vizsgáljuk meg $g$ hatását ennek a bázisnak az elemein.

$$\begin{aligned} g.(v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} (g v_{\sigma(i_1)}) \otimes \cdots \otimes (g v_{\sigma(i_n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(i_1)} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(i_n)} v_{\sigma(i_n)} \\ &= \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_n)} . \end{aligned}$$

Láthatóan a $v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_n}$ bázisban $g|_{\mathbb{S}_\lambda V}$ diagonális,

$$g|_{\mathbb{S}_\lambda V} = \mathrm{diag}(\ldots, \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n}, \ldots) .$$

Ebből következik, hogy

$$\mathrm{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\lambda V}) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_n} = h_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) .$$

Mivel a diagonalizálható endomorfizmusok egy sűrű halmazt alkotnak az endomorfizmusok között, az állítást beláttuk. □

3.6.13. MEGJEGYZÉS A bizonyítást $g$ Jordan-féle normálformájának segítségével is befejezhetjük.

3.6.14. PÉLDA Legyen $\lambda = (1, \ldots, 1)$, $\mathbb{S}_\lambda V = \bigwedge^n V$. A szimmetrikus hatványokra vonatkozó állítással teljesen analóg módon belátható, hogy ha $g \in \mathrm{GL}(V)$ sajátértékei $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, akkor

$$\chi_{(1,\ldots,1)}(g) = e_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) ,$$

ahol $e_n$ az $n$-edik elemi szimmetrikus polinom.

Az iménti két példa messzemenő általánosítása az alábbi eredmény, ami a fejezet központi mondanivalója.

3.6.15. TÉTEL *A fenti jelölésekkel $\mathbb{S}_\lambda V$ a $\mathrm{GL}(V)$ csoport egy irreducibilis reprezentációja, amelynek karaktere*

$$\chi_\lambda(g) = s_\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\ ,$$

*ahol $s_\lambda$ a $\lambda$ partícióhoz tartozó Schur-polinom, $\alpha_1,\ldots,\alpha_d$ pedig a $g\in\mathrm{GL}(V)$ endomorfizmus sajátértékei.*

*A $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d)$ partícióhoz tartozó $\mathbb{S}_\lambda V$ reprezentáció dimenziója*

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = s_\lambda(1,\ldots,1) = \prod_{1\leq i<j\leq d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}\ .$$

3.6.16. TÉTEL *Jelölje $d_\lambda$ a $V_\lambda = (\mathbb{C}S_n)c_\lambda$ komplex vektortér dimenzióját. Ekkor $V^{\otimes n}$ irreducibilis reprezentációkra történő direkt összeg felbontása*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{|\lambda|=n} (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus d_\lambda}\ .$$

3.6.17. KÖVETKEZMÉNY *Ha $\lambda \neq \mu$ két partíció legfeljebb $\dim V$ sorral (azaz a hozzájuk rendelt reprezentációk nem triviálisak), akkor*

$$\mathbb{S}_\lambda V \not\simeq \mathbb{S}_\mu V\ .$$

BIZONYÍTÁS A két reprezentáció karaktereire $s_\lambda \neq s_\mu$, így a reprezentációk sem lehetnek izomorfak. □

3.6.18. MEGJEGYZÉS Az $\{\mathbb{S}_\lambda V\}$ halmaz nem tartalmazhatja $\mathrm{GL}(V)$ összes irreducibilis reprezentációját, hiszen például ezek duális karakterei nincsenek benne a fenti halmazban. Belátható, hogy a

$$\{\mathbb{S}_\lambda V\} \cup \left\{(\mathbb{S}_\lambda V)^*\right\}$$

halmaz már tartalmazza $\mathrm{GL}(V)$ össze irreducibilis reprezentációját.

3.6.19. KÖVETKEZMÉNY *Legyen $c\in\mathbb{C}S_n$, $(\mathbb{C}S_n)c = \bigoplus_\lambda (V_\lambda)^{\oplus r_\lambda}$ mint $\mathbb{C}S_n$-modulusok. Ekkor*

$$V^{\otimes n}\cdot c = \bigoplus_\lambda (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus r_\lambda}$$

*mint $\mathrm{GL}(V)$-modulusok, továbbá*

$$\mathrm{Tr}\,(g|_{V^{\otimes n}\cdot c}) = \sum_\lambda r_\lambda s_\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\ .$$

Az egyik alapfeladat csoportreprezentációk leírásánál reprezentációk tenzorszorzatainak felbontása irreducibilis reprezentációk direkt összegére (ennek egy fontos speciális esete a 3.6.16. Tétel). Ezért nagy jelentősége van az alábbi eredménynek, amit mi nem fogunk bebizonyítani.

3.6.20. TÉTEL (LITTLEWOOD–RICHARDSON-SZABÁLY) *A fenti jelölésekkel*

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V \simeq \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \mathbb{S}_\nu V \ ,$$

*ahol* $\nu$ *végigfut az összes* $|\lambda|+|\mu|$*-elemű partíción.*

A 3.6.15. és a 3.6.16. tételek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi technikai jellegű lemmákra. Ebben a formában fogjuk a féligegyszerű algebrákra vonatkozó Wedderburn–Artin-féle elméletet felhasználni.

3.6.21. LEMMA *Legyen $G$ véges csoport, $U$ véges-dimenziós jobb $\mathbb{C}G$-modulus,*

$$B \stackrel{def}{=} \mathrm{Hom}_G(U,U) = \{\phi : U \to U \mid \forall g \in G, v \in U \ \phi(v.g) = \phi(v).g\} \ .$$

*Ekkor minden $c \in \mathbb{C}G$ esetén*

1. *a szorzás*
$$U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}Gc \xrightarrow{\times} Uc$$
*egy bal-$B$-modulus izomorfizmus.*

2. *Ha $W = (\mathbb{C}G)c$ irreducibilis bal-$\mathbb{C}G$-modulus, akkor $U \otimes_{\mathbb{C}G} W = Uc$ irreducibilis bal-$B$-modulus.*

3. *Ha $W_i = (\mathbb{C}G)c_i$ különböző irreducibilis bal-$\mathbb{C}G$-modulusok ($1 \le i \le k$), $m_i \stackrel{def}{=} \dim W_i$, akkor*
$$U \simeq \oplus_i (U \otimes_{\mathbb{C}G} W_i)^{\oplus m_i} \simeq \oplus_i (Uc_i)^{\oplus m_i}$$
*$U$-nak egy irreducibilis bal-$B$-modulusokra történő felbontása.*

A lemma bizonyítását későbbre halasztjuk. A tételek bizonyítása során az iménti lemmát az $G = S_n$, $U = V^{\otimes n}$ szereposztással fogjuk alkalmazni. Ily módon meg tudjuk határozni, hogy $V^{\otimes n}$ mint $B$-modulus hogyan bomlik fel irreducibilis részmodulusok direkt összegére. A $V^{\otimes n}$ vektortér azon endomorfizmusai, amelyek $V$ endomorfizmusaiból indukálódnak, mind $B$-ben vannak. Tipikusan $B$ jóval nagyobb, mint $\mathrm{End}(V)$ képe, azonban $\mathrm{End}(V)$ elemei bizonyos értelemben sűrűn helyezkednek el $B$-ben.

3.6.22. LEMMA *$B$-nek mint $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ lineáris alterének $\mathrm{End}(V)$ egy generátorrendszere. Egy $T \le V^{\otimes n}$ altér pontosan akkor bal-$B$-modulus, ha $T$ invariáns $\mathrm{GL}(V)$-re nézve.*

BIZONYÍTÁS Ha $W$ egy véges dimenziós vektortér, akkor

$$\mathrm{Sym}^n W = \langle w \otimes \cdots \otimes w \mid w \in W \rangle \subseteq W^{\otimes n} \ .$$

Alkalmazzuk ezt a tényt a $W = \mathrm{End}(V) = V^* \otimes V$ esetben. A lemma első állításának belátásához ekkor elég azt megmutatni, hogy

$$B = \mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) = \langle g^{\otimes n} \mid g \in \mathrm{End}(V)\rangle_{\mathrm{End}(V)} \,.$$

Multilineáris algebrából ismert, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V)^{\otimes n} &\simeq (V^* \otimes V)^{\otimes n} \\ &\simeq (V^*)^{\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \\ &\simeq \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \end{aligned}$$

mint $\mathbb{C}S_n$*-modulusok* (azaz az $S_n$ hatások végig kompatibilisek), ezért

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) &= \mathrm{End}(V^{\otimes n})^{S_n} \\ &\simeq \left(\mathrm{End}\, V^{\otimes n}\right)^{S_n} \\ &\simeq \mathrm{Sym}^n \mathrm{End}(V) \,. \end{aligned}$$

Ezzel az első állítást bebizonyítottuk[6].

A második állítás következik az elsőből annak ismeretében, hogy $\mathrm{GL}(V)$ sűrű (az euklideszi topológiára nézve) $\mathrm{End}(V)$-ben. □

BIZONYÍTÁS (a 3.6.15. és 3.6.16. tételeké) Amint azt említettük, a bizonyítás a 3.6.21. lemmán alapul, az $G = S_n$ és $U = V^{\otimes n}$ választással. Definíció szerint

$$\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes n} c_\lambda = U c_\lambda,$$

így a 3.6.21. lemma miatt $\mathbb{S}_\lambda V$ irreducibilis, továbbá rögtön adódik a 3.6.16. tétel állítása. Szintén a 3.6.21. lemma alapján

$$\mathbb{S}_\lambda V = \left(V^{\otimes n}\right) c_\lambda \simeq V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}G} V_\lambda = V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}G} (\mathbb{C}G) c_\lambda$$

és az $U_\lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathbb{C}G) a_\lambda$ választással

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_d} V \simeq V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}G} U_\lambda \,.$$

Azonban $U_\lambda \simeq \oplus_\mu K_{\lambda\mu} V_\mu$ mint $\mathbb{C}G$-modulusok, így $V^{\otimes n}$-nel tenzorszorozva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_d} V \simeq \oplus_\mu K_{\lambda\mu} \mathbb{S}_\mu V$$

mint $\mathrm{GL}(V)$-modulusok. A $g \in \mathrm{GL}(V)$ elem nyoma a baloldalon $h_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ (az $\alpha_i$ számok a $g$ lineáris transzformáció sajátértékei). Ily módon

$$h_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) = \sum_\mu K_{\lambda\mu} \mathrm{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\mu V}) \,.$$

A szimmetrikus függvényekről szóló fejezetben láttuk, hogy az iménti egyenlőségek teljesül a $\mathrm{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\mu V})$ függvények helyett az $s_\lambda$ Schur-polinomokkal. Mivel (a partíciókat megfelelően

[6] Az $\mathrm{End}(V^{\otimes n})^{S_n}$ kifejezés az $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ vektortérnek az adott $S_n$-hatás szerinti fixpontjait jelenti.

rendezve) a $K_{\lambda\mu}$ mátrix háromszögmátrix csupa 1-essel a főátlóján, ezért invertálható. Ebből következik, hogy

$$\chi_\lambda(g) = \operatorname{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\lambda V}) = s_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

adódik. Ezzel a karakterekre vonatkozó állítást beláttuk.

Hátra van még a $\mathbb{S}_\lambda V$ reprezentációk fokainak meghatározása. Azonban az $\mathbb{S}_\lambda V$ karakterére vonatkozó eredményből

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = s_\lambda(1, \dots, 1) = \prod_{1 \le i < j \le d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} .$$

□

3.6.23. MEGJEGYZÉS Ha a $\lambda$ partíciónak $d = \dim(V)$-nél több sora lenne, akkor

$$\chi_\lambda(g) = \operatorname{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\lambda V}) = s_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_d, 0, \dots, 0) .$$

A $g = \mathrm{Id}$ választással $\mathbb{S}_\lambda V = 0$ adódik.

Az alfejezet hátralévő részében a 3.6.21. lemmát fogjuk bebizonyítani.

BIZONYÍTÁS Véges csoport lévén $G$ teljesen reducibilis, azaz minden reprezentációja egyértelműen felbomlik irreducibilis részreprezentációk direkt összegére. Ebből következik, hogy a $\mathbb{C}Gc$ modulus $\mathbb{C}G$-nek, mint bal-$\mathbb{C}G$-modulusnak direkt összeadandója.

Tekintsük először a lemma első állítását. Belátjuk, hogy minden $c \in \mathbb{C}G$ esetén

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}Gc \xrightarrow{\times} Uc$$

egy bal-$B$-modulus izomorfizmus. Vegyük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \arrow[r, "\cdot c"] \arrow[d] & U \otimes_{\mathbb{C}G} (\mathbb{C}G)c \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \arrow[d] \\
U \arrow[r, "\cdot c"] & Uc \arrow[r, "j"] & U ,
\end{tikzcd}$$

ahol az $i$ és $j$ leképezések injektívek, és az összes függőleges nyíl az

$$u \otimes a \mapsto u \cdot a$$

homomorfizmust jelöli.

Az ábrán $\phi$-vel jelölt leképezésről kell megmutatni, hogy bal-$B$-modulus izomorfizmus. Mivel $i$ beágyazás, ha $\phi(x) = 0$ valamely $x \in U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}Gc$ esetén, akkor a diagram jobboldali négyzetének kommutativitása miatt $i(x) = 0$, így $x = 0$, tehát $\phi$ injektív. Ezzel analóg módon, a bal négyzet kommutativitásának felhasználásával adódik, hogy $\phi$ szürjektív is egyben.

Másodikként bebizonyítjuk, hogy ha $W = (\mathbb{C}G)c$ irreducibilis bal-$\mathbb{C}G$-modulus, akkor $U \otimes_{\mathbb{C}G} W = Uc$ irreducibilis bal-$B$-modulus lesz. Először tekintsük azt a speciális esetet, amikor $U$ irreducibilis $\mathbb{C}G$-modulus, így $B = \mathbb{C}$. Ez esetben elég belátni, hogy

$$\dim_{\mathbb{C}} U \otimes_{\mathbb{C}G} W \le 1 .$$

A Wedderburn–Artin-tétel miatt

$$\mathbb{C}G \simeq \oplus_{i\in I}\mathrm{End}(T_i) = \oplus_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathbb{C})$$

teljes mátrixalgebrák direkt összege, ezért $W$ az $\mathbb{C}G$ féligegyszerű algebra egy minimális balideáljának felel meg. Mátrixalgebrák direkt összegének egy minimális balideáljának az elemei

$$(M_1,\ldots,M_r)\ ,$$

alakúak, ahol egy adott $i_0$ index kivételével $M_i = 0$ minden $1 \leq i \leq r$ esetén, és $M_{i_0}$ elemei mind nullák egy oszlopot kivéve.

Hasonlóképpen, $U$ az $\mathbb{C}G$ algebra egy minimális jobbideáljának felel meg, amelyek elemei

$$(M_1,\ldots,M_r)\ ,$$

alakúak, ahol egy adott $i_0$ index kivételével $M_i = 0$ minden $1 \leq i \leq r$ esetén, és $M_{i_0}$ elemei mind nullák egy sort kivéve.

Ily módon

$$U\otimes_{\mathbb{C}G} W = (0,\ldots,\mathbb{C}E_{ij},\ldots,0)$$

ha mindkét tényezőben ugyanaz a nemnulla faktor, illetve 0 egyébként. Ezzel az irreducibilis esetet beláttuk.

Az általános esetben $U = \oplus_i U_i^{\oplus n_i}$, ahol minden $U_i$ irreducibilis jobb-$\mathbb{C}G$-modulus. Ekkor

$$U\otimes_{\mathbb{C}G} W = \oplus_i (U_i\otimes_{\mathbb{C}G} W)^{\oplus n_i} = \mathbb{C}^{n_k}$$

valamely $k$-ra; ekkor $U\otimes_{\mathbb{C}G} W$ irreducibilis $B = \oplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$ felett.

Végül igazoljuk, hogy ha $W_i = \mathbb{C}Gc_i$ különböző irreducibilis bal-$B$-modulusok, $m_i = \dim W_i$, akkor

$$U = \oplus_i (U\otimes_{\mathbb{C}G} W_i)^{\oplus m_i} \simeq \bigoplus_i (Uc_i)^{\oplus m_i}$$

az $U$ bal-$B$-modulus egy irreducibilis bal-$B$-modulusokra történő felbontása.

Ez gyorsan adódik abból, hogy

$$U \simeq U\otimes_{\mathbb{C}G}\mathbb{C}G \simeq U\otimes_{\mathbb{C}G}\left(\oplus_i W_i^{\oplus m_i}\right) \simeq \oplus_i (U\otimes_{\mathbb{C}G} W_i)^{\oplus m_i}\ . \qquad \square$$

# 4. fejezet

# Schubert-kalkulus

Az utolsó fejezet mind szerepében, mind felépítésében jelentősen eltér az eddigiektől. A partíciókalkulus algebrai geometriai alkalmazását mutatjuk be, az ún. Schubert-kalkulust. Precízen megfogalmazva, a Schubert-kalkulus a Grassmann-varietások kohomológiagyűrűiben történő számításokat takarja, a gyakorlatban ezzel együtt leginkább leszámláló geometriai problémák metszéselméleti eszközökkel való megoldását értjük alatta.

Leszámláló geometriai feladat alatt itt azt a jellegű kérdésfelvetést értjük, hogy határozzuk meg egy projektív tér adott tulajdonságú altereinek a számát. Egy konkrét példa: rögzítsünk négy különböző egyenest a három-dimenziós projektív térben. Hány olyan egyenes van $\mathbb{P}^3$-ban, amely a négy előre adott egyenes mindegyikét metszi?

Részben már a kérdések pontos megfogalmazásához, de a felhasznált módszerekhez mindenképpen szükség van egy-két félévnyi algebrai geometriai és algebrai topológiai tanulmányokra. Látható tehát, hogy az elvárt előismeretek lényegesen komolyabbak a korábbi fejezetekhez szükségesnél. Terjedelmi okokból kifolyólag kísérletet sem teszünk az igényelt előismeretek leírására, már csak azért sem, mert a nemzetközi matematikai irodalomban bőségesen fellelhetők bevezető algebrai geometriai, illetve algebrai topológiai művek. Az algebrai geometriával való ismerkedéshez (a teljesség igény nélkül) a [6], [9], [14], [18], [30], [39] könyveket ajánljuk, míg az algebrai topológiai előismereteket (sok egyéb forrás mellett) tartalmazzák a [4], illetve [19] művek.

További eltérés az eddigiektől, hogy erősebben támaszkodunk a feltételezett előismeretekre, és az esetek egy részében a megszokottnál kevesebb részletet adunk meg. További információt például a [12] vagy a [24] írásokban találhat az olvasó.

## 4.1. Grassmann-varietások

A magunk elé tűzött feladat projektív terek adott tulajdonságú altereinek (egyeneseinek, síkjainak, stb.) „számának” meghatározása. Ahhoz, hogy ezt szisztematikusan kivitelezni lehessen, szükséges, hogy az iménti kérdést precízen meg tudjuk fogalmazni. A továbbiakban (kevés, ámde explicit módon megemlített kivételtől eltekintve) a komplex számtest felett fogunk dolgozni.

ÖTLET Paraméterezzük az adott dimenziós $L \subseteq \mathbb{P}^n$ alterek halmazát egy megfelelő algebrai sokaság pontjaival, majd az így kapott sokaságon értelmezzük geometriailag a kívánt feltételeket. □

A $\mathbb{P}^n$ projektív tér $d$-dimenziós altereiből (vagy ekvivalens módon az $\mathbb{A}^{n+1}$ affin tér origón átmenő $d+1$-dimenziós lineáris altereiből) álló projektív algebrai sokaság az ún. *Grassmann-varietás*. Ez egy sima komplex sokaság is egyben, amelyet $G(n,d)$-vel jelölünk.

4.1.1. FELADAT *Legyen $V$ egy $n$-dimenziós vektortér a $q$-elemű véges test felett. Tetszőleges $0 \leq k \leq n$ esetén adjuk meg $V$ $k$-dimenziós lineáris altereinek a számát.*

Először tekintsük $G(n,d)$-t mint halmazt. Megadjuk $G(n,d)$ egy beágyazását egy alkalmas sokdimenziós projektív térbe. Legyen $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, $V$ egy $(n+1)$-dimenziós vektortér, $L \subseteq V$ $(d+1)$-dimenziós altér, $v_0,\dots,v_d$ az $L$ altér egy bázisa. Tekintsük az alábbi leképezést:

$$\Phi : G(n,d) \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+1}{d+1}-1}$$

$$L \mapsto [v_0 \wedge \cdots \wedge v_d] \in \mathbb{P}(\wedge^{d+1} V) \ .$$

Lineáris algebrából ismert, hogy $\Phi$ injektív.

4.1.2. FELADAT *Legyenek $v_0,\dots,v_d \in V$, illetve $v'_0,\dots,v'_d$ külön-külön lineárisan független halmazok. Igazoljuk, hogy*

$$\langle v_0,\dots,v_d \rangle = \langle v'_0,\dots,v'_d \rangle$$

*pontosan akkor teljesül, ha*

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \rangle = \langle v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_d \rangle \ .$$

Az

$$\operatorname{im}\Phi \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^{d+1} V) = \mathbb{P}^N \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}^{\binom{n+1}{d+1}-1}$$

ponthalmaz egy projektív varietás, amit $\mathbb{P}^N$-en értelmezett homogén polinomok közös nullhelyeként adhatunk meg. Az iménti konstrukcióból meg tudunk határozni egy homogén polinomokból álló egyenletrendszert, amelynek megoldásai pontosan a Grassmann-varietás (pontosabban $\operatorname{im}\Phi$) pontjai.

Rögzítsünk $y(0),\dots,y(n)$ homogén koordinátákat $\mathbb{P}^n$-en. Legyen $L \subseteq \mathbb{P}^N$ egy lineáris altér, amelyet egy $B_L \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n-d)}$ mátrixszal adunk meg. Az $L$ altér pontjai a

$$\sum_{j=0}^{n} b_{\alpha j}(y(j)) = 0 \qquad 1 \leq \alpha \leq n-d$$

egyenletrendszer megoldásai.

Mivel $\dim L = d$, a $B_L$ mátrix rangja maximális, azaz $\operatorname{rk} B_L = n-d$. Ekkor van $d+1$ darab $L$-beli pont, amelyek kifeszítik $L$-t. Legyen $p_0,\dots,p_d$ egy ilyen ponthalmaz. A $p_i$ pontok koordinátái egy $(d+1)\times(n+1)$-es mátrixok alkotnak, ennek bizonyos maximális négyzetes minorait fogjuk felhasználni.

Jelölje $p(j_0,\dots,j_d)$ annak a $d\times d$ méretű minornak a determinánsát, ami a $j_0$-adik, ..., $j_d$-edik oszlopokból áll, azaz

$$p(j_0,\dots,j_d) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} p_0(j_0) & \dots & p_0(j_d) \\ \vdots & & \vdots \\ p_d(j_0) & \dots & p_d(j_d) \end{vmatrix}$$

ahol $p_i(j)$ a $p_i$ pont $j$-edik koordinátája. Mivel a $(j_o,\dots,j_d)$ sorozatban két szomszédos elemet felcserélve a megfelelő $p$ szám ellentettjére vált:

$$p(j_0,\dots,j_k,j_{k+1},\dots,j_d) = -p(j_0,\dots,j_{k+1},j_k,\dots,j_d)\ ,$$

elég a szigorúan növekvő $j_0<\dots<j_d$ sorozatokat tekinteni.

A $p(j_0,\dots,j_d)$ determinánsok száma $N+1$ és legalább egy közülük nem nulla, mivel a $p_i$ pontok lineárisan függetlenek. Ezeket lexikografikusan elrendezve egy

$$L \mapsto (\dots,p(j_0,\dots,j_d),\dots) \in \mathbb{P}^N$$

leképezést kapunk.

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha egy másik, $q_0,\dots,q_d$ $L$-beli független pont $d$-est választunk referenciaként. Lineáris algebrából ismert, hogy ekkor létezik olyan nemszinguláris $C \in GL(\wedge^{d+1}V)$ lineáris transzformáció, amelyre $Cq_i = p_i$ minden $0\le i\le d$ esetén (természetesen $C$ távolról sem egyértelmű). Rögtön látható, hogy

$$q(j_0,\dots,j_d) = \det C\cdot p(j_0,\dots,j_d)\ ,$$

s így

$$(\dots,q(j_0,\dots,j_d),\dots) = (\dots,p(j_0,\dots,j_d),\dots) \in \mathbb{P}^N\ .$$

A fenti konstrukció látható módon jóldefiniált.

4.1.3. DEFINÍCIÓ *A $G(n,d)$ Grassmann-varietásnak az ily módon megadott projektív beágyazását* Plücker-beágyazás*nak, a $p(j_0,\dots,j_d)$ koordinátákat pedig* Plücker-koordinátá*knak nevezzük.*

4.1.4. FELADAT *Mutassuk meg, hogy a Plücker-beágyazás megegyezik a korábbi, ékszorzat segítségével megadott beágyazással.*

4.1.5. MEGJEGYZÉS Felmerülhet a kérdés, hogy az imént megadott kétségkívül elegáns beágyazás mennyire ad hoc; illetve, hogy a $G(n,d)$ halmazt nem lehet-e vajon más 'természetes' algebrai varietásstruktúrával ellátni. Erre a kérdésre a választ, miszerint a most ismertetett módszer bizonyos szempontból az egyetlen értelmes választás, a reprezentálható funktorok elmélete adja meg (ld. [17]).

4.1.6. PÉLDA Legyen $d=0$. Ekkor

$$\Phi : G(n,0) \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+1}{1}-1} = \mathbb{P}^n\ .$$

Másrészt a $\Phi$ leképezés szürjektív, hiszen az $\mathbb{A}^{n+1}$-beli egydimenziós lineáris alterek halmaza definíció szerint nem más, mint $\mathbb{P}^n$. Ezért

$$G(n,0) = \mathbb{P}^n\ .$$

4.1.7. PÉLDA Hasonlóképpen látható be, hogy

$$G(n,n-1) = (\mathbb{P}^n)^* \simeq \mathbb{P}^n .$$

Az utolsó izomorfizmus mint projektív algebrai varietások közti izomorfizmus értendő.

4.1.8. PÉLDA A legkisebb példa, amelyre $G(n,d)$ nem izomorf egy projektív térrel, $G(3,1)$, a háromdimenziós projektív tér egyeneseinek halmaza. Az imént elmondottak alapján egy $L$ egyenest egy

$$B_L = \begin{pmatrix} p_0(0) & p_0(1) & p_0(2) & p_0(3) \\ p_1(0) & p_1(1) & p_1(2) & p_1(3) \end{pmatrix}$$

mátrix határoz meg. A hat Plücker-koordináta:

$$\begin{aligned}
p(01) &= \begin{vmatrix} p_0(0) & p_0(1) \\ p_1(0) & p_1(1) \end{vmatrix} = p_0(0)p_1(1) - p_0(1)p_1(0) \\
p(02) &= \begin{vmatrix} p_0(0) & p_0(2) \\ p_1(0) & p_1(2) \end{vmatrix} = p_0(0)p_1(2) - p_0(2)p_1(0) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
p(23) &= \begin{vmatrix} p_0(2) & p_0(3) \\ p_1(2) & p_1(3) \end{vmatrix} = p_0(2)p_1(3) - p_0(3)p_1(2) ,
\end{aligned}$$

ezek $G(3,1)$-et $\mathbb{P}^5$-be ágyazzák be.

Fontos kérdés, hogy vajon

$$\Phi : G(n,d) \to \mathbb{P}^N$$

szürjektív-e, illetve ha nem, akkor hogyan jellemezhetők $\mathbb{P}^N$ azon pontjai, amelyek az adott Grassmann-varietáshoz tartoznak. Erre ad választ a következő tétel.

4.1.9. TÉTEL *Legyen $x = (\dots, p(j_0,\dots,j_d),\dots) \in \mathbb{P}^N$ tetszőleges pont. Ekkor $x \in G(n,d)$ pontosan akkor ha minden $j_0 < \cdots < j_{d-1}$ és $k_0 < \cdots < k_{d+1}$ indexsorozatra*

$$\sum_{l=0}^{d+1} (-1)^l p(j_0,\dots,j_{d-1},k_l)p(k_0,\dots,\hat{k}_l,\dots,j_{d+1}) = 0 .$$

4.1.10. MEGJEGYZÉS A tételben szereplő egyenleteket *Plücker-relációk*nak hívjuk.

4.1.11. PÉLDA Vegyük elő ismét a projektív térbeli egyenesek példáját és számítsuk ki a $G(3,1)$-et megadó egyenleteket. Mivel $d-1=0$, ezért $j_0 = 0,1,2,3$ az összes számbajöhető $j$-sorozat. Válasszuk először a $j_0 = 0$ esetet, legyen a $k$ indexsorozat $1 < 2 < 3$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{2} (-1)^l p(j_0,k_l)p(k_0,\dots,\hat{k}_l,\dots,k_2) \\
&\qquad = p(01)p(23) - p(02)p(13) + p(03)p(12) .
\end{aligned}$$

Vegyük most az $1 < 2 < 3$ sorozat helyett a $0 < 1 < 2$ sorozatot. Ez esetben

$$\sum_{l=0}^{2}(-1)^l p(j_0,k_l)p(k_0,\ldots,\hat{k}_l,\ldots,k_2)$$
$$= p(00)p(12)-p(01)p(02)+p(02)p(01)=0\,,$$

tehát nem kaptunk új egyenletet. Végigmenve az összes további lehetőségen, arra az eredményre jutunk, hogy diszjunkt $j_0$ és $k_0 < k_1 < k_2$ sorozatok esetén a

$$p(01)p(23)-p(02)p(13)+p(03)p(12) \;=\; 0$$

egyenletet kapjuk, nem diszjunkt $j,k$ sorozatok esetén meg a $0=0$ egyenletet. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$G(3,1) \;=\; V(p(01)p(23)-p(02)p(13)+p(03)p(12)) \subseteq \mathbb{P}^N$$

egy kvadratikus hiperfelület az ötdimenziós projektív térben.

BIZONYÍTÁS (4.1.9. Tétel) Először belátjuk, hogy a $G(n,d)$ Grassmann-varietás pontjai kielégítik a Plücker-relációkat. Legyen tehát $p_0,\ldots,p_d \in L$ olyan ponthalmaz, ami kifeszíti $L$-t. A

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l p(j_0,\ldots,j_{d-1},k_l)p(k_0,\ldots,\hat{k}_l,\ldots,k_{d+1})$$

Plücker-relációt másként

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \\ p_i(j_0) & \cdots & p_i(j_{d-1}) & p_i(k_l) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix} .$$

alakban írhatjuk fel.

Fejtsük ki az első determinánsokat az utolsó, $k_l$ indexű oszlopuk szerint,

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l \left( \sum_{i=0}^{d}(-1)^{(d+i)} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \hat{p}_i(j_0) & \cdots & \hat{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} p_i(k_l) \right) \times$$
$$\times \begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix} ,$$

majd cseréljük meg a két szummát:

$$\sum_{i=0}^{d}(-1)d+i \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \hat{p}_i(j_0) & \cdots & \hat{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \cdot \sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l p_i(k_l) \begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix} .$$

Vegyük észre, hogy a belső szumma minden esetben nulla, mivel

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l p_i(k_l)\begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} \cdots & p_i(k_l) & \cdots \\ \cdots & p_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & p_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix}$$

és ez utóbbi determináns első és $i+2$-edik sora megegyezik. Ezért

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \\ p_i(j_0) & \dots & p_i(j_{d-1}) & p_i(k_l) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dots & \hat{p}_0(k_l) & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \hat{p}_d(k_l) & \dots \end{vmatrix} = 0\,,$$

azaz a Grassmann-varietás pontjaira valóban teljesülnek a Plücker-relációk.

Tekintsük most a másik irányú tartalmazást, lássuk be, hogy ha egy $x \in \mathbb{P}^N$ pont minden Plücker-relációt kielégít, akkor $x \in G(n,d)$. Ehhez bizonyos értelemben „megoldjuk” a Plücker-egyenleteket. Legyen $x(k_0,\dots,k_d) \neq 0$ (mivel az ilyen típusú kifejezések $x$ homogén koordinátáit alkotják, ilyen biztos lesz). Be fogjuk látni a 4.1.12. során, hogy az

$$x(k_0,\dots,\hat{k}_l \dots,k_d,j)$$

típusú koordináták meghatározzák az összes többit. Egyenlőre fogadjuk el a lemma állítását és bizonyítsuk be segítségével a tétel hátralévő részét.

Először is, észrevehetjük, hogy a $(d+1)(n-d)+1$ darab

$$x(k_0,\dots,\hat{k}_l,\dots,k_d,j)$$

alakú koordináta már egyértelműen meghatároz egy $L \subseteq \mathbb{P}^N$ $d$-síkot. Hiszen ha $0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq n$, akkor — feltéve, hogy $x(k_0,\dots,k_d) = 1$ — a

$$p_i(j) \stackrel{\text{def}}{=} x(k_0,\dots,k_{i-1},j,k_{i+1},\dots,k_d)$$

választással kapott

$$(p_i(0),\dots,p_i(n))$$

pontok értelmesek (nem minden koordinátájuk nulla) és lineárisan függetlenek (mivel $p_i(k_l) = \delta_{il}$), ezért a $p_0,\dots,p_d$ pontok kifeszítenek egy $L$ $d$-síkot.

Látható, hogy $L$ Plücker-koordinátái pontosan a megfelelő kiindulási $x(j_0,\dots,j_d)$ értékek, hiszen a $(j_0,\dots,j_d)$-hez tartozó egyenlő $\det_{0\leq i\leq d, 0\leq\beta\leq d} p_i(j_\beta)$-val. Mármost ha a $\{j_0,\dots j_d\}$ és $\{k_0,\dots,k_d\}$ pontosan egy $\lambda$ helyen térnek el, akkor

$$\big(p_i(j_\beta)\big) = \mathrm{Id}$$

a $\lambda$-adik oszlop kivételével, így $L$ $(j_0,\dots,j_d)$-hez tartozó Plücker-koordinátája $p_\lambda(j_\lambda) = x(j_0,\dots,j_d)$. A 4.1.12. Lemma szerint a fenti típusú koordináták már meghatározzák az összes többit.

Ha $L' \subseteq \mathbb{P}^N$ egy másik $d$-sík ugyanazokkal a Plücker-koordinátákkal, akkor elérhető, hogy

$$\det p'_i(k_\gamma) \neq 0$$

legyen, ily módon azt is biztosíthatjuk, hogy

$$\left(p'_i(k_\gamma)\right) = \mathrm{Id} = \left(p_i(k_\gamma)\right) ,$$

azaz $L' = L$. □

**4.1.12. Lemma** *Az*

$$x(k_0, \ldots, \hat{k}_l \ldots, k_d, j)$$

*alakú koordináták meghatározzák az összes többit.*

Bizonyítás Teljes indukciót fogunk használni az

$$m \stackrel{\text{def}}{=} d+1-|\{j_0, \ldots, j_d\} \cap \{k_0, \ldots, k_d\}|$$

mennyiségre, azaz arra a számra, amely megadja, hogy a két indexhalmaz hány helyen különbözik egymástól. Az $m=1$ eset magától értetődő. Tegyük fel, hogy az $1, \ldots, m-1$ számokra már tudjuk a lemma állítását.

Tekintsük a $(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots j_d)$, $(k_0, \ldots, k_d, j_\beta)$ sorozatpárnak megfelelő

$$\sum_{l=0}^{d+1} (-1)^l p(j_0, \ldots, j_{d-1}, k_l) p(k_0, \ldots, \hat{k}_l, \ldots, k_{d+1}) = 0$$

Plücker-relációt. Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, j_\beta) p(k_0, \ldots, k_d) \\ &= \sum \sum_{l=0}^{d} (-1)^l p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, k_l) p(k_0, \ldots, \hat{k}_l, \ldots, k_d, j_\beta) . \end{aligned}$$

Ha $k_l \in \{j_0, \ldots, j_d\}$, akkor

$$p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, k_l) = 0 .$$

Amennyiben $k_l \notin \{j_0, \ldots, j_d\}$ akkor $j_0, \ldots \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, k_l$ közül pontosan $m-1$ *nincs* benne $\{k_0, \ldots, k_d\}$-ben. Ebből következik, hogy ki tudjuk fejezni a

$$p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, j_\beta) \cdot p(k_0, \ldots, k_d)$$

szorzatot olyan $p(i_0, \ldots, i_d)$ koordinátákkal, ahol

$$\{i_0, \ldots, i_d\} \quad \text{és} \quad \{k_0, \ldots, k_d\}$$

legfeljebb $m-1$ helyen különbözik egymástól. Az indukciós feltevés szerint

$$p(j_0, \ldots, j_d) p(k_0, \ldots, k_d)^{m-1}$$

kifejezhető olyan koordinátákkal, amelyek legfeljebb egy indexben térnek el $(k_0, \ldots, k_d)$-től. Mivel $p(k_0, \ldots, k_d) \neq 0$, ez igaz lesz $p(j_0, \ldots, j_d)$-re is. Ezzel a lemmát igazoltuk. □

4.1.13. MEGJEGYZÉS A fenti tétel algebrai geometriai szempontból pontos verziója az alábbi: A $G(n,d) \subseteq \mathbb{P}^N$ Grassmann-varietáson eltűnő homogén polinomok ideálját a Plücker-relációk generálják. Ezt nem bizonyítjuk be.

4.1.14. MEGJEGYZÉS A $G(n,d)$ varietás egy alternatív jellemzése:

$$G(n,d) \simeq U(n+d)/U(n) \times U(d) \ ,$$

ahol $U(n) = U(n,\mathbb{C})$ az adott vektortéren ható komplex unitér lineáris transzformációk csoportja. Ebből az is következik, hogy $G(n,d)$ sima és irreducibilis.

Tekintsünk most úgy $G(n,d)$ halmazra/projektív varietásra, mint egy $n+1$-dimenziós $V$ vektortér $d+1$-dimenziós altereinek a halmazára. Rögzítsünk egy $e_1,\ldots,e_{n+1}$ bázist $V$-ben (azaz egy $V \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ izomorfizmust). Ekkor adott $W \in G(n,d)$ alteret megadhatunk $d+1$ darab $\mathbb{C}^{n+1}$-beli $w_1,\ldots,w_{d+1}$ vektorral, amelyek kifeszítik $W$-t. Ezek egy

$$M_W = \begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{d+1,1} & \ldots & v_{d+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$(d+1)\times(n+1)$-es $d+1$-rangú mátrixot adnak meg. Tetszőleges ilyen mátrix leírja $G(n,d)$ egy elemét és két fenti alakú $M$,$M'$ mátrix pontosan akkor reprezentálja ugyanazt az alteret, ha létezik $C \in GL(W) = GL(\mathbb{C},d+1)$, amelyre $M = CM'$.

Válasszunk egy $I = \{i_1,\ldots,i_{d+1}\} \subseteq \{1,\ldots,n+1\}$ $k$-elemű indexhalmazt; legyen

$$\begin{aligned} U_{\hat{I}} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{az } \{e_i \mid i \in I\} \text{ halmaz által kifeszített altér} \ , \\ &\quad\ \text{és} \\ \mathcal{U}_I &\stackrel{\text{def}}{=} \{W \in G(n,d) \mid W \cap U_{\hat{I}} \neq \emptyset\} \ . \end{aligned}$$

Másszóval $\mathcal{U}_I$ azon $W$ alterek halmaza, amelyekre az $I$-edik főminor valamely mátrixreprezentációban nemszinguláris. Tetszőleges $W \in \mathcal{U}_I$ altérnek van pontosan egy olyan mátrix leírása, amelyben az $I$-edik főminor az identitásmátrix.

4.1.15. MEGJEGYZÉS Egy fenti típusú mátrix sorvektorai nem mások, mint a $W \cap \left(U_{\hat{I}} + e_j\right)$ metszetek elemei (ahol $j \in I$).

Megfordítva, bármely olyan $(d+1)\times(n+1)$-es $M$ mátrix, amelynek $I$-edik főminora az identitás, megad egy $W \in \mathcal{U}_I$ alteret. A fentiekből következik, hogy $M$-nek az $I$-t kiegészítő $(n-d)\times(n+1)$-es méretű minora $W$-t egyértelműen meghatározza, és egy

$$\phi_I : \mathcal{U}_I \to \mathbb{C}^{(d+1)(n-d)}$$

bijektív leképezést valósít meg. Az $(\mathcal{U}_I, \phi_I)$ párok a Grassmann-varietás egy algebrai (vagy komplex analitikus) atlaszát adják meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy az átmenetfüggvények lineáris függvények.

Ez a lokális jellemzés megkönnyíti a Grassmann-varietások érintőtereinek leírását.

4.1.16. ÁLLÍTÁS *Egy $W \leq V$ $(d+1)$-dimenziós altér esetén jelölje $[W] \in G(n,d)$ a Grassmann-varietás neki megfelelő pontját. Ekkor Minden $[W] \in G(n,d)$ esetén*

$$T_{[W]}G(n,d) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V/W)\ .$$

BIZONYÍTÁS Rögzítsük a

$$[W] \in \mathcal{U}_I \subseteq G(n,d)$$

pontot. Ekkor tetszőleges $[W'] \in \mathcal{U}_I$ elem egy

$$\alpha : W \longrightarrow U_{\hat{I}}$$

lineáris leképezés gráfja, ily módon

$$\mathcal{U}_I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U_{\hat{I}})\ ,$$

amiből

$$T_{[W]}G(n,d) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U_{\hat{I}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V/W)$$

következik, amint azt állítottuk. □

Korábban láttuk, hogy $G(n,d) \subseteq \mathbb{P}(\wedge^{d+1}V)$ azon elemek halmaza, amelyek előállnak

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{d+1}$$

alakban. $\wedge^{d+1}V$ ilyen elemeit *teljesen felbomló*nak hívjuk. Ezek egy jellemzésének a segítségével $G(n,d)$ egy újabb leírását kapjuk.

4.1.17. ÁLLÍTÁS *Az eddigi jelöléseink megtartásával $\alpha \in \wedge^{d+1}V$ pontosan akkor teljesen felbomló, ha a*

$$\begin{array}{rcl} \phi : V & \longrightarrow & \wedge^{d+1}V \\ v & \mapsto & \alpha \wedge v \end{array}$$

*lineáris leképezés rangja $n-d$.*

BIZONYÍTÁS Vegyük észre, hogy egy $\alpha \in \Lambda^{d+1}V$ elem pontosan akkor osztható a $v \in V$ vektorral, ha $\alpha \wedge v = 0$. Emiatt $\alpha$ pontosan akkor lesz teljesen felbomló, ha az őt osztó vektorok terének dimenziója $k+1$. Ez ekvivalens a bizonyítandó állítással. □

4.1.18. FELADAT *Legyen $P \in \mathbb{P}^3$ egy tetszőleges pont; jelölje*

$$\Sigma_P \subseteq G(3,1)$$

*azon $\mathbb{P}^3$-beli egyenesek halmazát, amelyek átmennek a $P$ ponton. Mutassuk meg, hogy a Plücker-beágyazásban $\Sigma_P$ egy kétdimenziós $\mathbb{P}^5$-beli síknak felel meg.*

4.1.19. FELADAT *Tekintsünk egy $H \subseteq \mathbb{P}^3$ síkot. Legyen*

$$\Sigma_H \subseteq G(3,1)$$

*azon $\mathbb{P}^3$-beli egyenesek halmaza, amelyek benne vannak a $H$ síkban. Igazoljuk, hogy a Plücker-beágyazás során $\Sigma_H$ egy $\mathbb{P}^5$-beli síkra képződik bijektíven.*

4.1.20. FELADAT *Az előző két feladat megfordításaként mutassuk meg, hogy tetszőleges*

$$E \subseteq G(3,1) \subseteq \mathbb{P}^5$$

*kétdimenziós síkhoz vagy létezik olyan $P \in \mathbb{P}^3$ pont, amelyre $E = \Sigma_P$, vagy pedig található olyan $H \subseteq \mathbb{P}^3$ sík, amelyre $E = \Sigma_H$.*

4.1.21. FELADAT *Rögzítsünk most egy $P \in \mathbb{P}^3$ pontot és egy $H \subseteq \mathbb{P}^3$ síkot. Jelölje*

$$\Sigma_{P,H} \subseteq G(3,1)$$

*azon $L \subseteq \mathbb{P}^3$ egyenesek halmazát, amelyek átmennek $P$-n és benne vannak $H$-ban. Bizonyítsuk be, hogy $\Sigma_{P,H}$-nek a Plücker-beágyazásnál vett képe egy $\mathbb{P}^5$-beli egyenes.*

*Megfordítva, lássuk be, hogy minden $\ell \subseteq \mathbb{P}^5$-beli egyeneshez, amelyet $G(3,1)$-nek a Plücker-beágyazásnál vett képe tartalmaz, létezik olyan $P \in \mathbb{P}^3$ pont és $H \subseteq \mathbb{P}^3$ sík, hogy*

$$\ell = \Sigma_{P,H}\text{-nak a Plücker-beágyazásnál vett képe.}$$

4.1.22. FELADAT *Határozzuk meg két adott $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ egyenest metsző $\mathbb{P}^3$-beli egyenesek halmazának a képét $G(3,1) \subseteq \mathbb{P}^5$-ben.*

## 4.2. Komplex sokaságok axiomatikus kohomológiaelmélete

Az alfejezet során legyen $X$ egy $n$-dimenziós sima irreducibilis komplex projektív algebrai varietás, illetve, ami a céljaink szempontjából egyenértékű, egy összefüggő kompakt komplex sokaság. Ekkor értelmezhetünk $X$-en két sorozat funktort, az ún. komplex együtthatós homológia, illetve kohomológiafunktorokat, amelyek véges-dimenziós komplex vektortereket rendelnek $X$-hez. Ezeket a vektortereket

$$H_k(X,\mathbb{C})\text{-vel, illetve } H^k(X,\mathbb{C})\text{-vel}$$

jelöljük, és a nevük $X$ $k$-adik komplex együtthatós homológia- illetve kohomológiacsoportja.

Az alábbiakban ismertetjük ezen csoportok számunkra legfontosabb tulajdonságait. Az additívan írt csoportstruktúra (vagyis az adott komplex vektortérbeli összeadás) mellett a kohomológiacsoportok között van egy asszociatív és esetünkben kommutatív szorzás, az ún. sapka-szorzás, ami a kohomológiacsoportok direkt összegét fokszámozott kommutatív gyűrűvé teszi.

Az alábbiakban tömören, bizonyítások nélkül összefoglaljuk az algebrai varietások kohomológiaelméletének azon tulajdonságait, amelyekre az elkövetkezőkben szükségünk lesz. Feltételezzük, hogy az olvasónak rendelkezik alapvető jártassággal a szinguláris homológiacsoportok elméletében. Homológiaelméletről részletesen többek között a [4] és a [19] művekben, algebrai varietások topológiájáról pedig a [12] könyv függelékében olvashatunk. Fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy az itt következő leírás sokkal inkább a később felhasznált fogalmak összefoglalása, és nem egy önálló bevezetés.

A továbbiakban $X$ egy $n$-dimenziós sima irreducibilis komplex projektív varietás, számunkra elsősorban $X$ komplex együtthatós kohomológiacsoportjai lesznek érdekesek.

0. TULAJDONSÁG. Minden $k < 0$ és $k > 2n$ esetén

$$H_k(X,\mathbb{C}) = H^k(X,\mathbb{C}) = 0 .$$

1. TULAJDONSÁG. A sapkaszorzattal mint multiplikatív struktúrával ellátott

$$H^*(X,\mathbb{C}) = \oplus_{0\leq c\leq n} H^{2c}(X,\mathbb{C})$$

fokszámozott vektortér egy fokszámozott kommutatív gyűrű. Ha $k$ páratlan szám, akkor

$$H_k(X) = H^k(X) = 0 .$$

4.2.1. MEGJEGYZÉS Ha $X = \mathbb{P}^n$, akkor

$$H^{2c}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

és

$$H^*(X,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[t]/(t^{n+1}) .$$

mint fokszámozott gyűrűk.

2. TULAJDONSÁG. Tetszőleges $Y \subseteq X$ irreducibilis (nem feltétlenül sima) $c$-kodimenziós részsokasághoz definiálható egy nullától különböző

$$[Y] \in H_{2(n-c)}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{2c}(X,\mathbb{C})$$

kohomológiaosztály[1], $Y$ úgynevezett *fundamentális osztály*a. A fundamentális osztály az elvárásoknak megfelelően transzformálódik morfizmusok mentén történő előrenyomás és visszahúzás esetén.

3. TULAJDONSÁG Homotopikusan ekvivalens részvarietások ugyanazt a fundamentális osztályt adják.

4.2.2. MEGJEGYZÉS Ha egy $G$ összefüggő topologikus csoport hat $X$-en, akkor $[g(Y)] = [Y]$ minden $g \in G$-re.

[1] Az iménti homológia- és kohomológiacsoportok közti izomorfizmust a Poincaré-dualitás biztosítja.

4. TULAJDONSÁG Tegyük fel, hogy létezik $X$-nek zárt algebrai halmazokból álló olyan

$$X \supseteq X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \ldots \supseteq X_0 = \emptyset$$

filtrációja, hogy minden $X_i - X_{i-1}$ különbséghalmaz

$$X_i - X_{i-1} = {}_j U_{ij} \ ,$$

diszjunkt unió alakba írható, ahol

$$U_{ij} \simeq \mathbb{C}^{u_{ij}} \ .$$

Ekkor az

$$[\overline{U}_{ij}] \in H^*(X, \mathbb{C})$$

kohomológiaosztályok a $H^*(X, \mathbb{C})$ kohomológiagyűrű egy $\mathbb{Z}$-bázisát alkotják:

$$H^*(X, \mathbb{C}) = \oplus_{i,j} \mathbb{Z}[U_{ij}] \ .$$

4.2.3. MEGJEGYZÉS Az $n$-dimenziós projektív tér esetén egy tetszőleges

$$\mathbb{P}^n \supseteq \mathbb{P}^{n-1} \supseteq \ldots \supseteq \mathbb{P}^0 = \emptyset$$

teljes zászló egy megfelelő filtrációt szolgáltat. Ekkor

$$\mathbb{P}^i - \mathbb{P}^{i-1} = U_i \simeq \mathbb{A}^i$$

és

$$H^i(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[\overline{U_i}] \ .$$

5. TULAJDONSÁG Legyenek $Y, Z \subseteq X$ részvarietások, amelyekre

$$Y \cap X = W_1 \cup \cdots \cup W_t$$

részvarietások diszjunkt uniója, oly módon, hogy

$$\operatorname{codim}(W_i) = \operatorname{codim}(Y) + \operatorname{codim}(Z) \ ,$$

és minden $i$-re $W_i$ érintőtere $Y$ és $Z$ érintőtereinek metszete. Ekkor a megfelelő fundamentális osztályokra az alábbi egyenlőség teljesül a $H^*(X, \mathbb{C})$ gyűrűben:

$$[Y] \cdot [Z] = [W_1] + \cdots + [W_t] \ .$$

Ami számunkra érdekes lesz, az a Grassmann-varietások kohomológiagyűrűje. Látni fogjuk, hogy a rajta értelmezett algebrai struktúrának geometriai jelentősége is van.

## 4.3. Schubert-osztályok

Mostanra eljutottunk oda, hogy egyrészt pontosan értelmezni tudunk leszámláló geometriai kérdéseket, másrészt a tabló-kalkulusról szerzett ismereteink segítségével ezek közül egyszerűbbeket meg is tudunk oldani. Az a struktúra, amelynek keretei között a megoldás zajlani fog, a Grassmann-varietások kohomológiagyűrűje. A benne végzett számításokat összefoglaló néven gyakran Schubert-kalkulus néven emlegetik.

Az úgynevezett Schubert-varietások a Grassmann-varietások bizonyos részhalmazai, amelyek fontos szerepet játszanak a kombinatorikai és geometriai alkalmazásokban. Jelentőségük többek között abból adódik, hogy a Grassmann-varietások kohomológiagyűrűinek egy, az előző fejezet során (4. Tulajdonság) leírt bázisát alkotják.

Legyen

$$F. = (F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n) = \mathbb{P}^n$$

egy *teljes zászló*, azaz lineáris alterek olyan egymásba ágyazott sorozata, amelyekre $\dim F_i = i$. Válasszunk továbbá egy

$$\lambda = n-d \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{d+1} \geq 0$$

Young-diagramot legfeljebb $(d+1)(n-d)$ dobozzal.

4.3.1. DEFINÍCIÓ *Az $(F.,\lambda)$ párhoz tartozó Schubert-varietás*

$$\Omega_\lambda(F.) \stackrel{def}{=} \left\{ L \in G(n,d) \mid \forall 0 \leq i \leq d \ \dim(L \cap F_{n-d+i-\lambda_i}) \geq i \right\} .$$

4.3.2. MEGJEGYZÉS Az $\Omega_\lambda(F.) \subseteq G(n,d)$ Schubert-varietás irreducibilis, továbbá

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_\lambda(F.) = (d+1)(n-d) - |\lambda| .$$

4.3.3. ÁLLÍTÁS *Ha $F.,G. \subseteq \mathbb{P}^n$ két zászló, akkor létezik olyan $C \in PGL(N+1,\mathbb{C})$ invertálható lineáris transzformáció, amelyre*

$$CG(n,d) = G(n,d)$$

*és*

$$CF. = G. \ .$$

BIZONYÍTÁS Elemi lineáris algebra $n$-re vonatkozó teljes indukcióval. □

Az előző állítás szerint bármely két $F.,G.$ zászló egymásba vihető egy alkalmasan választott lineáris transzformáció segítségével amely $G(n,d)$-t invariánsan hagyja, így $\Omega_\lambda(F.)$ és $\Omega_\lambda(G.)$ homotóp ekvivalensek. Az axiomatikus kohomológiaelmélet 3. tulajdonsága alapján ekkor a hozzárendelt fundamentális osztályokra

$$[\Omega_\lambda(F.)] = [\Omega_\lambda(G.)] \in H^{2|\lambda|}(G(n,d),\mathbb{C})$$

adódik. Értelmes tehát az alábbi.

4.3.4. DEFINÍCIÓ *Az eddigi jelöléseinkkel*

$$\sigma_\lambda \overset{def}{=} [\Omega_\lambda(F.)] \in H^{2|\lambda|}(G(n,d),\mathbb{C})$$

*a $\lambda$ partícióhoz tartozó* Schubert-osztály.

4.3.5. TÉTEL *A $\{\sigma_\lambda\}$ osztályok a $H^*(G(n,d),\mathbb{C})$ kohomológiagyűrű egy $\mathbb{Z}$-bázisát alkotják. A $H^*(G(n,d),\mathbb{C})$-beli multiplikatív struktúrát a*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu,|\nu|=|\lambda|+|\mu|} c^{\nu}_{\lambda\mu}\sigma_\nu$$

*Littlewood–Richardson-szabály határozza meg.*

BIZONYÍTÁS A tételt nem bizonyítjuk be, noha ennek csupán technikai akadálya van: lényegében a tablókalkulus során belátott Littlewood–Richardson-szabályt kell lefordítani az algebrai varietások kohomológiájának a nyelvére. □

A Tétel egy jól ismert speciális esetét külön kiemeljük.

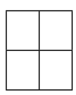
4.3.6. ÁLLÍTÁS (PIERI-FORMULA) *Legyen $1 \leq h \leq n-d$, $\lambda$ tetszőleges partíció. Ekkor*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_{(h)} = \sum_{\nu} \sigma_\nu \,,$$

*ahol az összegzés olyan $\nu$ partíciókon fut végig, amelyeket úgy kapunk, hogy $\lambda$-hoz hozzáadunk $h$ dobozt, mind különböző oszlopba.*

A fenti Pieri-formula a tablógyűrűbeli Pieri-formulának a következménye.

4.3.7. PÉLDA Kidolgozzuk a $G(3,1)$ Grassmann-sokaság esetét. Ez esetben $d+1 = n-d = 2$, tehát a legnagyobb lehetséges partíció



A további előforduló eseteket az alábbi táblázat tartalmazza:

| $\lambda$ partíció | geometriai leírás | $\dim_{\mathbb{C}} \sigma_\lambda$ |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | nincs feltétel, $\sigma_\lambda = G(3,1)$ | 4 |
| $\ydiagram{1}$ | metsz egy adott egyenest | 3 |
| $\ydiagram{2}$ | átmegy egy rögzített ponton | 2 |
| $\ydiagram{1,1}$ | benne van egy rögzített síkban | 2 |
| $\ydiagram{2,1}$ | átmegy egy rögzített síkban lévő rögzített ponton | 1 |
| $\ydiagram{2,2}$ | egy rögzített egyenes $\in G(3,1)$ | 0 |

A tételből következően a $\sigma_\lambda$ elemek közti szorzási szabályok az alábbiak:

$$\ydiagram{2} \cdot \ydiagram{1,1} = 0\,,$$

$$\ydiagram{1} \cdot \ydiagram{1} = \ydiagram{2} + \ydiagram{1,1} = 0\,,$$

$$\ydiagram{2} \cdot \ydiagram{2} = \ydiagram{1,1} \cdot \ydiagram{1,1} = \ydiagram{2,2}\,.$$

Ezek alapján könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\left(\ydiagram{1}\right)^4 = 2 \cdot \ydiagram{2,2}\,.$$

Más szóval, ha rögzítünk négy általános helyzetű egyenest $\mathbb{P}^3$-ben, akkor pontosan két olyan egyenes van, amelyik mind a négyet metszi.

Befejezésül bizonyítás nélkül bemutatunk két további összefüggést Schubert-osztályok között.

4.3.8. ÁLLÍTÁS (GIAMBELLI-FORMULA) *Tetszőleges*

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d)$$

*partíció esetén*

$$\sigma_\lambda = \begin{vmatrix} \sigma_{\lambda_1} & \sigma_{\lambda_1+1} & \cdots & \sigma_{\lambda_1+d-1} \\ \sigma_{\lambda_2-1} & \sigma_{\lambda_2} & \cdots & \sigma_{\lambda_2+(d-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\lambda_d-(d-1)} & \cdots & \cdots & \sigma_{\lambda_d} \end{vmatrix} .$$

4.3.9. TÉTEL (DUALITÁSI TÉTEL) *Legyenek* $\mu$, $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d)$ *tetszőleges partíciók,*

$$\lambda^* = (n-d-\lambda_d \geq \cdots \geq n-d-\lambda_1)$$

*a* $\lambda$*-nak megfelelő* duális partíció. *Ha* $|\lambda| + |\mu| = (d+1)(n-d)$, *akkor*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \delta_{\lambda^*,\mu} \cdot \sigma_{(n-d,\ldots,n-d)} ,$$

*ahol* $\sigma_{(n-d,\ldots,n-d)}$ *egy* $\mathbb{P}^n$*-beli egyenes osztálya* $H^{2(d+1)(n-d)}(G(n,d))$*-ben.*

# Irodalomjegyzék


[1] M. Artin: *Algebra*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[2] R. Ash: *Abstract Algebra: The basic graduate year*, http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Algebra.html

[3] S. Bosch: *Algebra*, 7. kiadás. Springer Verlag, Berlin, 2008.

[4] G. E. Bredon: *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139., Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] B. Conrad: *Tensor algebra and tensor pairings*, jegyzet, http://math.stanford.edu/~conrad/diffgeomPage/handouts.html.

[6] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1992.

[7] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Using algebraic geometry*, 2. kiadás. Springer Graduate Texts in Mathematics 185, Springer Verlag, Berlin, 2004.

[8] C. W. Curtis, I. Reiner: *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley& Sons, 1962, New York.

[9] I. Dolgachev: *Introduction to algebraic geometry*, jegyzet, http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/lecturenotes.html

[10] L. Dornhoff: *Group Representation Theory*, Marcel Dekker, New York, 1971.

[11] W. Fulton: *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*, preprint, arXiv:math/9908012.

[12] W. Fulton: *Young tableaux with applications to representation theory and geometry*. London Mathematical Society Student Texts, 35., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[13] W. Fulton, J. Harris: *Representation theory, a first course*, Graduate Texts in Mathematics, 129., Springer-Verlag, New York, 1991.

[14] A. Gathmann: *Algebraic geometry*, előadásjegyzet,
http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/alggeom.php

[15] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky: *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.

[16] D. M. Goldschmidt: *Group characters, symmetric functions and the Hecke algebra*, AMS University Lecture Series, Vol 4, Providence, Rhode Island, 1993.

[17] U. Görtz, T. Wedhorn: *Algebraic geometry I., Schemes with examples and exercises*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.

[18] R. Hartshorne: *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52., Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[19] A. Hatcher: *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[20] T. W. Hungerford: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 73. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[21] I. M. Isaacs: *Character theory of finite groups*, Dover, New York, 1994.

[22] G. D. James, A. Kerber: *The representation theory of the symmetric group*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, MA, 1981.

[23] Hanspeter Kraft: *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1985.

[24] S. L. Kleiman, D. Laksov: *Schubert calculus*, Amer. Math. Monthly 79 (1972), 1061–1082.

[25] T. Y. Lam: *A first course in noncommutative rings*, 2. kiadás, Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 2001.

[26] S. Lang: *Algebra*, 3. kiadás, Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.

[27] I. G. Macdonald: *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2. kiadás, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[28] S. Maclane: *Categories for the working mathematician*, 2. kiadás, Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.

[29] L. Manivel: *Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci*, SMF/AMS Texts and Monographs 6., American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2001.

[30] J. Milne: *Algebraic Geometry*, előadásjegyzet,
http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ag.html

[31] J. Milne: *Fields and Galois Theory*, előadásjegyzet,
http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/gt.html

[32] G. Navarro: *Characters and blocks of finite groups*, London Mathematical Society Lecture Notes 250, Cambridge University Press, 1998.

[33] A. Okounkov: *Why would multiplicities be log-concave?, The orbit method in geometry and physics* (Marseille, 2000), 329–347, Progr. Math., 213, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[34] B. Pareigis: *Advanced Algebra*, előadásjegyzet,
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~pareigis/Vorlesungen/01WS/AdvAlgebra_en.html

[35] R. S. Pierce: *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, 88., Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[36] Claudio Procesi: *Lie groups: an approach through invariants and representations*. Springer, Berlin, 2007.

[37] J. Rotman: *An introduction to homological algebra*. Second edition. Universitext. Springer, New York, 2009.

[38] J. -P. Serre: *Linear representations of finite groups*. Springer Graduate Texts in Mathematics 42, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[39] I. R. Shafarevich: *Basic algebraic geometry 1., Varieties in projective space*. 2. kiadás, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[40] R. P. Stanley: *Enumerative combinatorics I-II.*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997 és 1999.

[41] A. Terras: *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, London Mathematical Society Student Texts 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[42] Charles Weibel: *K-Theory*, jegyzet,
http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html

[43] G. Scheja, U. Storch: *Lehrbuch der Algebra I.*, 2. kiadás, B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[44] G. Scheja, U. Storch: *Lehrbuch der Algebra II.*, 2. kiadás, B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.