Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2013 ősz

Minden héten van 15 db feladat,összesen 10 ponttal megjelölve, mindegyikük 1 (•) vagy 2 pontos (••) beadandó házi feladat. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónusz feladatok, ezek darabonként 2 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az igazi csoportmunka hasznos, ebben az esetben is mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. 1.1 János, Jakab, József, Joli és Jenő egy együttest alkotnak, mely öt hangszeren játszik. Ha mindegyikük tud mind az öt hangszeren játszani, hányféle elrendezés lehetséges? És ha János, Jakab és Joli mind az öt hangszeren játszhat, de József és Jenő mindketten csak dobolni és zongorázni tudnak?

1.2 •• Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve, értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.3 Hányféle rendszámot lehet kiadni a mai magyar rendszerben? és ha kihagynak 5 három betűs ronda szót? és a régi rendszerben (pl.: PI-47-05) hányféle rendszám volt lehetséges?

1.4 **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?

b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, hogy ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?

c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?

d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.5 Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

1.6 • Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

a) a férfiak közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

b) a nők közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

c) egy nő és egy férfi nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

1.7 Azt írta a szomszédasszony, hogy a gyerek kapott három különböző bútort, melyeket egy hét alatt a harmadik féleképpen rendez el a szobájában. Nyugtassuk meg, hogy ez nem sok: hányféle elrendezés lehetséges, ha feltesszük, hogy mindegyik bútor a négy fal valamelyikéhez kerülhet, és egy falhoz legfeljebb egy bútor mehet? És ha nem vesszük figyelembe a bútor-konfiguráció tájolását, azaz egy elrendezést nem különböztetünk meg a $90^o, 180^o, 270^o$-os elforgatottjától.

1.8 Az alábbi rácson hányféleképpen lehet A-ból B-be eljutni csak jobbra vagy felfelé lépésekkel?

1.9 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.10 •• Apukámmal fagyizni megyünk. Én három, ő négygombócos fagyikelyhet eszik. Hányféle fagyikehely állítható össze nekem, és hányféle neki, ha a Zsitvay cukrászdában kondérban tárolják a fagyit, ezért mindig csak hétféle van: puncs, csoki, vanilia, gesztenye, őszibarack, eper, fahéj?

1.11 **a)** • Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) • Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)\cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) • A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.12 •• Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.13 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{ha } \mathbf{P}\{A\} \geq 0.8 \text{ és } \mathbf{P}\{B\} \geq 0.6, \text{ akkor } \mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.14 Helyezzünk n golyót véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres, ha

a) a golyók megkülönböztethetőek,

b) a golyók megkülönböztethetetlenek?

1.15 Egy sportklubban 36-an teniszeznek, 28-an fallabdáznak, 18-an tollasoznak összesen. 22-en teniszeznek és fallabdáznak, 12-en teniszeznek és tollasoznak, 9-en fallabdáznak és tollasoznak. 4-en mindhárom sportot űzik. Hányan játszanak legalább egy ilyen labdasportot?

1.16 Egy régi félreeső színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában?

b) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan k ember megy haza a saját kalapjában?