Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2013 ősz

Minden héten lesz kb 15 db feladat, ezek közül néhány pontokkal (összesen 10 ponttal) megjelölve, mindegyikük 1 (•) vagy 2 pontos (••) beadandó házi feladat. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónusz feladatok, ezek darabonként 2 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az igazi csoportmunka hasznos, ebben az esetben is mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF:

1.1 János, Jakab, József, Joli és Jenő egy együttest alkotnak, mely öt hangszeren játszik. Ha mindegyikük tud mind az öt hangszeren játszani, hányféle elrendezés lehetséges? És ha János, Jakab és Joli mind az öt hangszeren játszhat, de József és Jenő mindketten csak dobolni és zongorázni tudnak?

1.2 •• Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve, értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.3 Hányféle rendszámot lehet kiadni a mai magyar rendszerben? És ha kihagynak 5 három betűs ronda szót? És a régi rendszerben (pl.: PI-47-05) hányféle rendszám volt lehetséges?

1.4 **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?

b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, hogy ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?

c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?

d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.5 Azt írta a szomszédasszony, hogy a gyerek kapott három különböző bútort, melyeket egy hét alatt a harmadik féleképpen rendez el a szobájában. Nyugtassuk meg, hogy ez nem sok: hányféle elrendezés lehetséges, ha feltesszük, hogy mindegyik bútor a négy fal valamelyikéhez kerülhet, és egy falhoz legfeljebb egy bútor mehet? És ha nem vesszük figyelembe a bútor-konfiguráció tájolását, azaz egy elrendezést nem különböztetünk meg a $90^o,\ 180^o,\ 270^o$-os elforgatottjától?

1.6 • Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

1.7 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

a) a férfiak közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

b) a nők közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

c) egy nő és egy férfi nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

1.8 Az alábbi rácson hányféleképpen lehet A-ból B-be eljutni csak jobbra vagy felfelé lépésekkel?

1.9 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.10 •• Apukámmal fagyizni megyünk. Én három, ő négygombócos fagyikelyhet eszik. Hányféle fagyikehely állítható össze nekem, és hányféle neki, ha a Zsitvay cukrászdában kondérban tárolják a fagyit, ezért mindig csak hétféle van: puncs, csoki, vanília, gesztenye, őszibarack, eper, fahéj?

1.11 **a)** • Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) • Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) • A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.12 •• Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.13 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{ha } \mathbf{P}\{A\} \geq 0.8 \text{ és } \mathbf{P}\{B\} \geq 0.6, \text{ akkor } \mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.14 n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres, ha

a) a golyók megkülönböztethetőek,

b) a golyók megkülönböztethetetlenek?

1.15 Egy sportklubban 36-an teniszeznek, 28-an fallabdáznak, 18-an tollasoznak összesen. 22-en teniszeznek és fallabdáznak, 12-en teniszeznek és tollasoznak, 9-en fallabdáznak és tollasoznak. 4-en mindhátom sportot űzik. Hányan játszanak legalább egy ilyen labdasportot?

1.16 Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában?

b) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan k ember megy haza a saját kalapjában?

2. HF:

2.1 8 bástyát véletlenszerűen elhelyezünk a sakktáblán. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egynél több bástyát)? És ha csak 6 bástyát helyezünk el véletlenszerűen, akkor mennyi ez az esély?

2.2 Egy közösségben 20 család van: 6 családban egy gyerek van, 8 családban kettő, 3 családban három, 2 családban négy, 1 családban öt.

a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek vsan, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

2.3 Aladár és Béla beszállnak egy liftbe egy tizenegy emeletes ház földszintjén. Feltéve, hogy semmi közük egymáshoz, és mindketten teljesen egyenletesen választanak emeletet, mi a valószínűsége, hogy Aladár magasabbra megy mint Béla? És Cili az utolsó pillanatban betoppan, mi a valószínűsége, hogy magasabbra megy, mint a két fiú?

2.4 •• Egy urnában 4 piros és 5 zöld golyó van. A és B visszatevés nélkül felváltva húznak az urnából egészen addig, amikor először piros golyó kerül elő. Ha A húzott először, mi a valószínűsége, hogy ő húz először zöld golyót?

2.5 Egy erdőben 19 őz lakik, közülük 6 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 5-t befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

2.6 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, 3, 4$?

Bónusz: Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, \ldots, n$?

2.7 Barátaink, név szerint A, B, C, D, E, F, G, heten vannak mint a gonoszok. Egyszer felsorakoznak egymás mellé nagyon gonosz arcot vágni, vletlenszeren. Mi a valószínűsége, hogy A és B között pontosan i ember ül, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$?

2.8 •• Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1$, $f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

2.9 Egy urnában van 5 piros, 7 zöld, és 8 sárga golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

2.10 •• Anna, Bori és Cili egyforma erejű ping-pong játékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel... Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Folytatják ezt mindaddig, amíg valamelyikük kétszer egymasután nem nyer és a körmérkőzés győztesévé van kikiáltva. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

2.11 Anna, Bori s Cili most érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bea dob, aztán Cili, majd megint Anna, és így tovább. Csinálják ezt mindaddig, míg valaki fejet dob.

a) Írjuk le az eseményteret!

b) Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{$ Anna nyer $\}$, $B = \{$ Bori nyer $\}$, $(A \bigcup B)^c$!

2.12 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három befutó között van, R pedig azt, hogy Ráró páros helyen végez. Mennyi $C \bigcup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \bigcup R$?

2.13 Kiosztunk egy pakli jól megkevert franciakártyát. Mi a valószínűsége, hogy

a) • a pikk ász a 7. kiosztott lap?

b) • az első kiosztott ász a 7.-ként kiosztott lap?

c) • az első négy lap különböző színű?

d) • az első négy lap különböző figurájú?

2.14 Van két kockánk, amiket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?

2.15 Mi a valószínűsége, hogy 20 véletlenül kiválasztott ember születési hónapjait tekintve, az év hónapjai közül pontosan 5 lesz, melyben pontosan ketten születtek, és másik 3 hónap, melyben pontosan hárman születtek? (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy mindenki, egymástól függetlenül, egyforma, 1/12 eséllyel születik az év bármelyik hónapjában!)

2.16 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3-3 nő, illetve férfi lesz?

Bónusz: Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

a) nincsen teljes pár,

b) pontosan egy teljes pár van,

c) pontosan két teljes pár van?