

Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]
 Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2013 ősz

(zárójelben: tervezett tanóraszám; egy tanóra = 45 perc)

A félév folyamán a táblázat enyhén változhat!

| -vel kezdődő hét | Előadás K 12-14 | Matgyak K 14-16 | Fizgyak P 10-12 |
|-------------------------|--|--|--|
| Szept. 9 | Eseménytér, mértékelmélet (1.3), egyszerű állítások (0.7) | Kombinatorikai gyorstalpaló (1.3), Szita formula (0.7) | Kombinatorikai gyorstalpaló (1.3), Szita formula (0.7) |
| Szept. 16 | Feltételes val. (0.5), Bayes tétel (1), (feltételes) függetlenség (0.5) | Egyenlő val.ségű események (2) [1. HF] | Egyenlő val.ségű események (2) [1. HF] |
| Szept. 23 | (Feltételes) függetlenség (0.8), diszkrét val.változók (0.5), várható é., szórás (0.7) | Feltételes val. (0.8), Bayes tétel (0.5), (feltételes) függetlenség (0.7) [2. HF] | Feltételes val. (0.8), Bayes tétel (0.5), (feltételes) függetlenség (0.7) [2. HF] |
| Szept. 30 | Bernoulli, binomiális eo. (1), Bernoulli NSZTV (0.6), geometriai, neg.binom, hipergeom. eo. (0.4) | (Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók, pld. geometriai, neg.binom, hipergeom (1) [3. HF] | (Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók, pld. geometriai, neg.binom, hipergeom (1) [3. HF] |
| Okt. 7 | Poisson eloszlás & folyamat (1), eloszlásfv., sűr.fv. (0.5), várható é., szórás (0.5) | Diszkrét val.változók 2, pld. Poisson (2) [4. HF] | Diszkrét val.változók 2, pld. Poisson (2) [4. HF] |
| Okt. 14 | Medián, kvantilisok, módusz (0.3), egyenletes eo. (0.3), normális eo. (0.7), Stirling formula (0.7) | Eloszlásfv., sűr.fv. (0.8), várható é., szórás (0.5), eo.-sok egyéb jell. (0.3), Bertrand paradoxon (0.4), [5. HF] | Eloszlásfv., sűr.fv. (0.8), várható é., szórás (0.5), eo.-sok egyéb jell. (0.3), Bertrand paradoxon (0.4), [5. HF] |
| Okt. 21 | DeMoivre-Laplace t. (1), exponenciális eo, Poisson folyamat megint (0.7), eo. trafó (0.3) | Egyenletes eo. (0.5), normális eo. (0.7), DeMoivre-Laplace alk. (0.6) [6. HF] | Egyenletes eo. (0.5), normális eo. (0.7), DeMoivre-Laplace alk. (0.6) [6. HF] |
| Okt. 28 | Együttes eo. (0.7), többdim. eo.trafó (0.5), többdim. Gauss (0.8) | Exponenciális eo. és Poisson folyamat (0.8), egyéb folytonos eo-ok, eo-trafók (1.2) [7. HF] | Mindenszentek |
| Nov. 4 | Független v.v. (0.7), konvolúció (0.7), felt. eo.-k (0.6) | Együttes eo. (1), függetlenség és többdim. eo.trafók (0.5), többdim. Gauss (0.5) [8. HF] | Exponenciális eo. és Poisson folyamat (0.8), egyéb folytonos eo-ok, eo-trafók (1.2) [7. HF] |
| Nov. 11 | TDK konferencia | TDK konferencia | Együttes eo. (1), függetlenség és többdim. eo.trafók (0.5), többdim. Gauss (0.5) [8. HF] |
| Nov. 18 | Összegek várható értéke, Cauchy-Schwarz, első és második momentum módszer (1.5), kovariancia, korreláció (0.5) | Többdim. eo.trafók (0.6), konvolúciók (0.6), felt. eo.-k (0.8) [9. HF] | Középisk. nyílt nap |
| Nov. 25 | Felt. várh. é. (1.2), Steiner tétel (0.8) | Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák (2) [10. HF] | Többdim. eo.trafók (0.6), konvolúciók (0.6), felt. eo.-k (0.8) [9. HF] |
| Dec. 2 | Momentum gen. fv. (0.7), Csebisev egyenlőtlenség & NSZGYT (1.3) | Feltételes várható é. (0.8), többd. Gauss újra (1.2) [11. HF] | Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák (2) [10. HF] |
| | | | Dec. 6 szombat Feltételes várható é. (0.8), többd. Gauss újra (1.2) |
| Dec. 9 | CHT (0.7), NSZET (1.3) | Mom. gen. fv., NSZT, centrális határeloszlástétel, Csebisev és Markov egyenlőtlenség, egyéb | Mom. gen. fv., NSZT, centrális határeloszlástétel, Csebisev és Markov egyenlőtlenség, egyéb [11. HF] |

Ajánlott irodalom

Az elsődleges forrás, amit az előadások beosztása is viszonylag pontosan követ, a Balázs Márton – Tóth Bálint jegyzet. Más könyvjavaslatokkal együtt a kurzus honlapján megtalálható:
<http://www.math.bme.hu/~gabor/oktatas/Vsz2013/Vsz2013.html>.

HF feladatsor témák

Ez csak körülbelüli iránymutató. Az előadás menetétől függően a témák esetleg vándorolhatnak, régebbi témák mindig visszatérhetnek, a fő csapásiránytól eltérő érdekességek fölbukkanhatnak.

1. Alapvető kombinatorika, szita-formula
2. Eseménytér, egyenlő valószínűségű események
3. Feltételes val., Bayes tétel, (feltételes) függetlenség
4. Diszkrét valószínűségi eloszlások 1. Binomiális, geometriai, negatív binom, hipergeom.
5. Diszkrét valószínűségi eloszlások 2. Várható érték és szórás, Poisson eloszlás
6. Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, egyenletes eloszlás
7. Egyenletes eloszlás, normális eloszlás, binomiális és Poisson eloszlás normális approximációja, deMoivre-Laplace
8. Exponenciális eloszlás, Poisson folyamat megint, Cauchy és lognormális eloszlás, eloszlástranszformációk
9. Diszkrét és folytonos együttes eloszlások, többdimenziós eloszlástranszformációk, többdimenziós normális
10. Többdimenziós eloszlástranszformációk, függetlenség és konvolúció, feltételes eloszlások
11. Összegek várható értéke és szórása, kovarianciák, korrelációk, többdimenziós normális korrelációi

Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2013 őszi

Minden héten lesz kb 15 db feladat, ezek közül néhány pontokkal (összesen 10 ponttal) megjelölve, mindegyikük 1 (•) vagy 2 pontos (••) beadandó házi feladat. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónusz feladatok, ezek darabonként 2 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az igazi csoportmunka hasznos, ebben az esetben is mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF:

- 1.1 János, Jakab, József, Joli és Jenő egy együtttest alkotnak, mely öt hangszeren játszik. Ha mindegyikük tud mind az öt hangszeren játszani, hányféle elrendezés lehetséges? És ha János, Jakab és Joli mind az öt hangszeren játszhat, de József és Jenő mindketten csak dobolni és zongorázni tudnak?
- 1.2 •• Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve, értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?
- 1.3 Hányféle rendszámot lehet kiadni a mai magyar rendszerben? És ha kihagynak 5 három betűs ronda szót? És a régi rendszerben (pl.: PI-47-05) hányféle rendszám volt lehetséges?
- 1.4
 - a) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?
 - b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, hogy ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?
 - c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?
 - d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?
- 1.5 Azt írta a szomszédasszony, hogy a gyerek kapott három különböző bútort, melyeket egy hét alatt a harmadik féleképpen rendez el a szobájában. Nyugtassuk meg, hogy ez nem sok: hányféle elrendezés lehetséges, ha feltesszük, hogy mindegyik bútor a négy fal valamelyikéhez kerülhet, és egy falhoz legfeljebb egy bútor mehet? És ha nem vesszük figyelembe a bútor-konfiguráció tájolását, azaz egy elrendezést nem különböztetünk meg a 90° , 180° , 270° -os elforgatottjától?
- 1.6 • Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?
- 1.7 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiből áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiből álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha
 - a) a férfiak közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,
 - b) a nők közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,
 - c) egy nő és egy férfi nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?
- 1.8 Az alábbi rácson hányféleképpen lehet A -ból B -be eljutni csak jobbra vagy felfelé lépésekkel?

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|-----|
| | • | • | • | • | • | B |
| | • | • | • | • | • | • |
| | • | • | • | • | • | • |
| A | • | • | • | • | • | • |
- 1.9 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?
- 1.10 •• Apukámmal fagyizni megyünk. Én három, ő négygombócos fagyikelyhet eszik. Hányféle fagyikehely állítható össze nekem, és hányféle neki, ha a Zsitvay cukrászdában kondérban tárolják a fagyit, ezért mindig csak hétféle van: puncs, csoki, vanília, gesztenye, őszibarack, eper, fahéj?

1.11 a) • Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára oly módon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) • Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) • A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.12 •• Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

| | | |
|----------|---------------|--------------------|
| I: 26% | I és II: 6% | I és II és III: 2% |
| II: 18% | I és III: 9% | |
| III: 22% | II és III: 5% | |

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

- a) Határozzuk meg hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.
- b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?
- c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?
- d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?
- e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.13 a) Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{ha } \mathbf{P}\{A\} \geq 0.8 \text{ és } \mathbf{P}\{B\} \geq 0.6, \text{ akkor } \mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A_1, A_2, \dots, A_n eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \dots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.14 n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres, ha

- a) a golyók megkülönböztethetőek,
- b) a golyók megkülönböztethetetlenek?

1.15 Egy sportklubban 36-an tenisznek, 28-an fallabdáznak, 18-an tollasoznak összesen. 22-en tenisznek és fallabdáznak, 12-en tenisznek és tollasoznak, 9-en fallabdáznak és tollasoznak. 4-en mindhárom sportot űzik. Hányan játszanak legalább egy ilyen labdasportot?

1.16 Egy régi vágású színházban a fogastra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik.

- a) Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában?
- b) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan k ember megy haza a saját kalapjában?

2. HF:

2.1 8 bástyát véletlenszerűen elhelyezünk a sakktáblán. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egynél több bástyát)? És ha csak 6 bástyát helyezünk el véletlenszerűen, akkor mennyi ez az esély?

- 2.2 Egy közösségben 20 család van: 6 családban egy gyerek van, 8 családban kettő, 3 családban három, 2 családban négy, 1 családban öt.
- Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
 - Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- 2.3 Aladár és Béla beszállnak egy liftbe egy tizenegy emeletes ház földszintjén. Feltéve, hogy semmi közük egymáshoz, és mindketten teljesen egyenletesen választanak emeletet, mi a valószínűsége, hogy Aladár magasabbra megy mint Béla? És Cili az utolsó pillanatban betoppan, mi a valószínűsége, hogy magasabbra megy, mint a két fiú?
- 2.4 •• Egy urnában 4 piros és 5 zöld golyó van. A és B visszatevés nélkül felváltva húznak az urnából egészen addig, amikor először piros golyó kerül elő. Ha A húzott először, mi a valószínűsége, hogy ő húz először zöld golyót?
- 2.5 Egy erdőben 19 őz lakik, közülük 6 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 5-t befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?
- 2.6 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, 3, 4$?
- Bónusz: Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, \dots, n$?
- 2.7 Barátaink, név szerint A, B, C, D, E, F, G , heten vannak mint a gonoszok. Egyszer felsorakoznak egymás mellé nagyon gonosz arcot vágni, véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy A és B között pontosan i ember ül, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$?
- 2.8 •• Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.
- Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$ -re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)
 - Határozzuk meg P_n -t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.
- 2.9 Egy urnában van 5 piros, 7 zöld, és 8 sárga golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?
- 2.10 •• Anna, Bori és Cili egyforma erejű ping-pong játékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel... Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Folytatják ezt mindaddig, amíg valamelyikük kétszer egymásután nem nyer és a körmérkőzés győztesévé van kikiáltva. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n} . (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?
- 2.11 Anna, Bori s Cili most érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bea dob, aztán Cili, majd megint Anna, és így tovább. Csinálják ezt mindaddig, míg valaki fejet dob.
- Írjuk le az eseményteret!
 - Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{ \text{Anna nyer} \}, B = \{ \text{Bori nyer} \}, (A \cup B)^c$!
- 2.12 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három befutó között van, R pedig azt, hogy Ráró páros helyen végez. Mennyi $C \cup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \cup R$?
- 2.13 Kiosztunk egy pakli jól megkevert franciakártyát. Mi a valószínűsége, hogy
- a pikk ász a 7. kiosztott lap?
 - az első kiosztott ász a 7.-ként kiosztott lap?
 - az első négy lap különböző színű?
 - az első négy lap különböző figurájú?
- 2.14 Van két kockánk, amiket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?
- 2.15 Mi a valószínűsége, hogy 20 véletlenül kiválasztott ember születési hónapjait tekintve, az év hónapjai közül pontosan 5 lesz, melyben pontosan ketten születtek, és másik 3 hónap, melyben pontosan hárman születtek? (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy mindenki, egymástól függetlenül, egyforma, $1/12$ eséllyel születik az év bármelyik hónapjában!)

2.16 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3-3 nő, illetve férfi lesz?

Bónusz: Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

- a) nincsen teljes pár,
- b) pontosan egy teljes pár van,
- c) pontosan két teljes pár van?

3. HF:

3.1 Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik hatos van?

3.2 Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S .

- a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?
- b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?
- c) Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

3.3 a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

3.4 •• Két golyó mindegyike egymástól függetlenül $1/2$ - $1/2$ valószínűséggel feketére vagy aranszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

- a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranszínű?
- b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

3.5 Három szakács, A, B és C , egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A ?

3.6 •• Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 8 elsőéves fiú, 6 elsőéves lány, 4 másodéves fiú vett fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül véletlenül választott hallgató neme és évfolyama független egymástól?

3.7 Egy genetikai rendellenesség a magzatok fél százalékát érinti. Egy „megbízhatónak számító” diagnosztikai eljárás a meglévő rendellenességet biztosan detektálja, míg rendellenesség hiányában 95% valószínűséggel a helyes negatív választ adja, 5% valószínűséggel pedig a hibás pozitív választ. Ha az eljárás eredménye pozitív, mi a valószínűsége, hogy magzatunknak tényleg megvan a rendellenessége?

3.8 Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

- (a) Feldobjuk az érmét.
- (b) Megint feldobjuk az érmét.
- (c) Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újakezdjük az első lépéssel.
- (d) Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.
 - a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.
 - b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

3.9 Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

- a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.)
- b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3.10 •• Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Mutassuk meg, hogy A, B és C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

- 3.11 •• Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p - 1)P_{n-1} + (1 - p), \quad n \geq 1; \quad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n$ minden $n \geq 0$ esetén.

- 3.12 Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$P\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 675x^{-2} \quad (x \geq 30).$$

Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/4$ valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

- 3.13 •• Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsmában van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?
- 3.14 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p , Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.
- Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?
 - Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?
 - Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

- 3.15 Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

- 3.16 n dobozban elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

- 3.17 Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudások: átlagosan az esetek $2/3$ -ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.

Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.

Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mindott Béla, Béla tudja, hogy mit mindott Cili, Cili tudja, hogy mit mindott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

Bónusz: Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok, az $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott, golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzzuk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzzuk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n + 1, 10n + 2, \dots, 10(n + 1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzzuk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig. Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.

(Tipp: Analízisből tudjuk, hogy ha $0 < \varepsilon_n < 1$ minden n -re, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) > 0$ pontosan akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$.)