Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2013 ősz

(zárójelben: tervezett tanóraszám; egy tanóra = 45 perc)

A félév folyamán a táblázat enyhén változhat!

-vel kezdődő hét	**Előadás** K 12-14	**Matgyak** K 14-16	**Fizgyak** P 10-12
Szept. 9	Eseménytér, mértékelmélet (1.3), egyszerű állítások (0.7)	Kombinatorikai gyorstalpaló (1.3), Szita formula (0.7)	Kombinatorikai gyorstalpaló (1.3), Szita formula (0.7)
Szept. 16	Feltételes val. (0.5), Bayes tétel (1), (feltételes) függetlenség (0.5)	Egyenlő val.ségű események (2) **[1. HF]**	Egyenlő val.ségű események (2) **[1. HF]**
Szept. 23	(Feltételes) függetlenség (0.8), diszkrét val.változók (0.5), várható é., szórás (0.7)	Feltételes val. (0.8), Bayes tétel (0.5), (feltételes) függetlenség (0.7) **[2. HF]**	Feltételes val. (0.8), Bayes tétel (0.5), (feltételes) függetlenség (0.7) **[2. HF]**
Szept. 30	Bernoulli, binomiális eo. (1), Bernoulli NSZTV (0.6), geometriai, neg.binom, hipergeom. eo. (0.4)	(Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók, pld. geometriai, neg.binom, hipergeom (1) **[3. HF]**	(Feltételes) függetlenség (1), diszkrét val.változók, pld. geometriai, neg.binom, hipergeom (1) **[3. HF]**
Okt. 7	Poisson eloszlás & folyamat (1), eloszlásfv., sűr.fv. (0.5), várható é., szórás (0.5)	Diszkrét val.változók 2, pld. Poisson (2) **[4. HF]**	Diszkrét val.változók 2, pld. Poisson (2) **[4. HF]**
Okt. 14	Medián, kvantilisek, módusz (0.3), egyenletes eo. (0.3), normális eo. (0.7), Stirling formula (0.7)	Eloszlásfv., sűr.fv. (0.8), várható é., szórás (0.5), eo.-sok egyéb jell. (0.3), Bertrand paradoxon (0.4), **[5. HF]**	Eloszlásfv., sűr.fv. (0.8), várható é., szórás (0.5), eo.-sok egyéb jell. (0.3), Bertrand paradoxon (0.4), **[5. HF]**
Okt. 21	DeMoivre-Laplace t. (1), exponenciális eo, Poisson folyamat megint (0.7), eo. trafó (0.3)	Egyenletes eo. (0.5), normális eo. (0.7), DeMoivre-Laplace alk. (0.6) **[6. HF]**	Egyenletes eo. (0.5), normális eo. (0.7), DeMoivre-Laplace alk. (0.6) **[6. HF]**
Okt. 28	Együttes eo. (0.7), többdim. eo.trafó (0.5), többdim. Gauss (0.8)	Exponenciális eo. és Poisson folyamat (0.8), egyéb folytonos eo-ok, eo-trafók (1.2) **[7. HF]**	**Mindenszentek**
Nov. 4	Független v.v. (0.7), konvolúció (0.7), felt. eo.-k (0.6)	Együttes eo. (1), függetlenség és többdim. eo.trafók (0.5), többdim. Gauss (0.5) **[8. HF]**	Exponenciális eo. és Poisson folyamat (0.8), egyéb folytonos eo-ok, eo-trafók (1.2) **[7. HF]**
Nov. 11	**TDK konferencia**	**TDK konferencia**	Együttes eo. (1), függetlenség és többdim. eo.trafók (0.5), többdim. Gauss (0.5) **[8. HF]**
Nov. 18	Összegek várható értéke, Cauchy-Schwarz, első és második momentum módszer (1.5), kovariancia, korreláció (0.5)	Többdim. eo.trafók (0.6), konvolúciók (0.6), felt. eo.-k (0.8) **[9. HF]**	**Középisk. nyílt nap**
Nov. 25	Felt. várh. é. (1.2), Steiner tétel (0.8)	Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák (2) **[10. HF]**	Többdim. eo.trafók (0.6), konvolúciók (0.6), felt. eo.-k (0.8) **[9. HF]**
Dec. 2	Momentum gen. fv. (0.7), Csebisev egyenlőtlenség & NSZGYT (1.3)	Feltételes várható é. (0.8), többd. Gauss újra (1.2) **[11. HF]**	Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák (2) **[10. HF]**
			Dec. 6 szombat Feltételes várható é. (0.8), többd. Gauss újra (1.2)
Dec. 9	CHT (0.7), NSZET (1.3)	Mom. gen. fv., NSZT, centrális határeloszlástétel, Csebisev és Markov egyenlőtlenség, egyéb	Mom. gen. fv., NSZT, centrális határeloszlástétel, Csebisev és Markov egyenlőtlenség, egyéb **[11. HF]**

Ajánlott irodalom

Az elsődleges forrás, amit az elődások beosztása is viszonylag pontosan követ, a Balázs Márton – Tóth Bálint jegyzet. Más könyvjavaslatokkal együtt a kurzus honlapján megtalálható:
`http://www.math.bme.hu/~gabor/oktatas/Vsz2013/Vsz2013.html`.

HF feladatsor témák

Ez csak körülbelüli iránymutató. Az előadás menetétől függően a témák esetleg vándorolhatnak, régebbi témák mindig visszatérhetnek, a fő csapásiránytól eltérő érdekességek fölbukkanhatnak.

1. Alapvető kombinatorika, szita-formula
2. Eseménytér, egyenlő valószínűségű események
3. Feltételes val., Bayes tétel, (feltételes) függetlenség
4. Diszkrét valváltozók 1. Binomiális, geometriai, negatív binom, hipergeom.
5. Diszkrét valváltozók 2. Várható érték és szórás, Poisson eloszlás
6. Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, egyenletes eloszlás
7. Egyenletes eo, normális eloszlás, binomiális és Poisson eloszlás normális approximációja, deMoivre-Laplace
8. Exponenciális eloszlás, Poisson folyamat megint, Cauchy és lognormális eloszlás, eloszlástranszformációk
9. Diszkrét és folytonos együttes eloszlások, többdimenziós eloszlástranszformációk, többdimenziós normális
10. Többdimenziós eloszlástranszformációk, függetlenség és konvolúció, feltételes eloszlások
11. Összegek várható értéke és szórása, kovarianciák, korrelációk, többdimenziós normális korrelációi

Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2013 ősz

Minden héten lesz kb 15 db feladat, ezek közül néhány pontokkal (összesen 10 ponttal) megjelölve, mindegyikük 1 (•) vagy 2 pontos (••) beadandó házi feladat. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónusz feladatok, ezek darabonként 2 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az igazi csoportmunka hasznos, ebben az esetben is mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF:

1.1 János, Jakab, József, Joli és Jenő egy együttest alkotnak, mely öt hangszeren játszik. Ha mindegyikük tud mind az öt hangszeren játszani, hányféle elrendezés lehetséges? És ha János, Jakab és Joli mind az öt hangszeren játszhat, de József és Jenő mindketten csak dobolni és zongorázni tudnak?

1.2 •• Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve, értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.3 Hányféle rendszámot lehet kiadni a mai magyar rendszerben? És ha kihagynak 5 három betűs ronda szót? És a régi rendszerben (pl.: PI-47-05) hányféle rendszám volt lehetséges?

1.4 **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?

b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, hogy ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?

c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?

d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.5 Azt írta a szomszédasszony, hogy a gyerek kapott három különböző bútort, melyeket egy hét alatt a harmadik féleképpen rendez el a szobájában. Nyugtassuk meg, hogy ez nem sok: hányféle elrendezés lehetséges, ha feltesszük, hogy mindegyik bútor a négy fal valamelyikéhez kerülhet, és egy falhoz legfeljebb egy bútor mehet? És ha nem vesszük figyelembe a bútor-konfiguráció tájolását, azaz egy elrendezést nem különböztetünk meg a 90^o, 180^o, 270^o-os elforgatottjától?

1.6 • Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

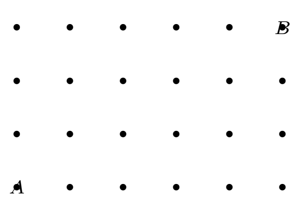
1.7 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

a) a férfiak közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

b) a nők közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

c) egy nő és egy férfi nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

1.8 Az alábbi rácson hányféleképpen lehet A-ból B-be eljutni csak jobbra vagy felfelé lépésekkel?



1.9 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.10 •• Apukámmal fagyizni megyünk. Én három, ő négygombócos fagyikelyhet eszik. Hányféle fagyikehely állítható össze nekem, és hányféle neki, ha a Zsitvay cukrászdában kondérban tárolják a fagyit, ezért mindig csak hétféle van: puncs, csoki, vanília, gesztenye, őszibarack, eper, fahéj?

1.11 **a)** • Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) • Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) • A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3\binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.12 •• Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.13 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

ha $\mathbf{P}\{A\} \geq 0.8$ és $\mathbf{P}\{B\} \geq 0.6$, akkor $\mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4$.

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.14 n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres, ha

a) a golyók megkülönböztethetőek,

b) a golyók megkülönböztethetetlenek?

1.15 Egy sportklubban 36-an teniszeznek, 28-an fallabdáznak, 18-an tollasoznak összesen. 22-en teniszeznek és fallabdáznak, 12-en teniszeznek és tollasoznak, 9-en fallabdáznak és tollasoznak. 4-en mindhátom sportot űzik. Hányan játszanak legalább egy ilyen labdasportot?

1.16 Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában?

b) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan k ember megy haza a saját kalapjában?

2. HF:

2.1 8 bástyát véletlenszerűen elhelyezünk a sakktáblán. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egynél több bástyát)? És ha csak 6 bástyát helyezünk el véletlenszerűen, akkor mennyi ez az esély?

2.2 Egy közösségben 20 család van: 6 családban egy gyerek van, 8 családban kettő, 3 családban három, 2 családban négy, 1 családban öt.

- **a)** Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek vsan, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- **b)** Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

2.3 Aladár és Béla beszállnak egy liftbe egy tizenegy emeletes ház földszintjén. Feltéve, hogy semmi közük egymáshoz, és mindketten teljesen egyenletesen választanak emeletet, mi a valószínűsége, hogy Aladár magasabbra megy mint Béla? És Cili az utolsó pillanatban betoppan, mi a valószínűsége, hogy magasabbra megy, mint a két fiú?

2.4 •• Egy urnában 4 piros és 5 zöld golyó van. A és B visszatevés nélkül felváltva húznak az urnából egészen addig, amikor először piros golyó kerül elő. Ha A húzott először, mi a valószínűsége, hogy ő húz először piros golyót?

2.5 Egy erdőben 19 őz lakik, közülük 6 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 5-t befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

2.6 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, 3, 4$?

Bónusz: Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, \ldots, n$?

2.7 Barátaink, név szerint A, B, C, D, E, F, G, heten vannak mint a gonoszok. Egyszer felsorakoznak egymás mellé nagyon gonosz arcot vágni, vletlenszeren. Mi a valószínűsége, hogy A és B között pontosan i ember ül, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$?

2.8 •• Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

- **a)** Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)
- **b)** Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

2.9 Egy urnában van 5 piros, 7 zöld, és 8 sárga golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

2.10 •• Anna, Bori és Cili egyforma erejű ping-pong játékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel... Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Folytatják ezt mindaddig, amíg valamelyikük kétszer egymasután nem nyer és a körmérkőzés győztesévé van kikiáltva. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

2.11 Anna, Bori s Cili most érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bea dob, aztán Cili, majd megint Anna, és így tovább. Csinálják ezt mindaddig, míg valaki fejet dob.

- **a)** Írjuk le az eseményteret!
- **b)** Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{$ Anna nyer $\}$, $B = \{$ Bori nyer $\}$, $(A \bigcup B)^c$!

2.12 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három befutó között van, R pedig azt, hogy Ráró páros helyen végez. Mennyi $C \bigcup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \bigcup R$?

2.13 Kiosztunk egy pakli jól megkevert franciakártyát. Mi a valószínűsége, hogy

- **a)** • a pikk ász a 7. kiosztott lap?
- **b)** • az első kiosztott ász a 7.-ként kiosztott lap?
- **c)** • az első négy lap különböző színű?
- **d)** • az első négy lap különböző figurájú?

2.14 Van két kockánk, amiket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?

2.15 Mi a valószínűsége, hogy 20 véletlenül kiválasztott ember születési hónapjait tekintve, az év hónapjai közül pontosan 5 lesz, melyben pontosan ketten születtek, és másik 3 hónap, melyben pontosan hárman születtek? (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy mindenki, egymástól függetlenül, egyforma, 1/12 eséllyel születik az év bármelyik hónapjában!)

2.16 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3-3 nő, illetve férfi lesz?

Bónusz: Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

a) nincsen teljes pár,

b) pontosan egy teljes pár van,

c) pontosan két teljes pár van?

3. HF:

3.1 Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

3.2 Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?

c) Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

3.3 **a)** Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

3.4 •• Két golyó mindegyike egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel feketére vagy aranyszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranyszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranyszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

3.5 Három szakács, A, B és C, egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A?

3.6 •• Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 8 elsőéves fiú, 6 elsőéves lány, 4 másodéves fiú vett fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül véletlenül választott hallgató neme és évfolyama független egymástól?

3.7 Egy genetikai rendellenesség a magzatok fél százalékát érinti. Egy „megbízhatónak számító” diagnosztikai eljárás a meglévő rendellenességet biztosan detektálja, míg rendellenesség hiányában 95% valószínűséggel a helyes negatív választ adja, 5% valószínűséggel pedig a hibás pozitív választ. Ha az eljárás erdeménye pozitív, mi a valószínűsége, hogy magzatunknak tényleg megvan a rendellenessége?

3.8 Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

(a) Feldobjuk az érmét.

(b) Megint feldobjuk az érmét.

(c) Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újrakezdjük az első lépéssel.

(d) Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.

a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.

b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

3.9 Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (*Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.*)

b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3.10 •• Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Mutassuk meg, hogy A, B és C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

3.11 •• Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p), \qquad n \geq 1; \qquad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$ minden $n \geq 0$ esetén.

3.12 Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 675x^{-2} \qquad (x \geq 30).$$

Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/4$ valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

3.13 •• Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

3.14 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p, Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.

a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?

b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?

c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

3.15 Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

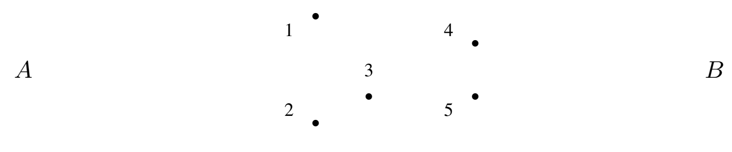
3.16 n dobozban elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

3.17 Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek 2/3-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.
Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.
Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mindott Béla, Béla tudja, hogy mit mindott Cili, Cili tudja, hogy mit mindott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

Bónusz: Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok, az $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott, golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n+1, 10n+2, \dots, 10(n+1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig. Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.
(*Tipp: Analízisből tudjuk, hogy ha* $0 < \varepsilon_n < 1$ *minden* n*-re, akkor* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 0$ *pontosan akkor, ha* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$.)

4. HF:

4.1 Alább egy áramkör, ahol mindegyik kapcsoló egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel van nyitva vagy zárva.



Mi a valószínűsége, hogy A-tól B-ig áram folyhat ezen az áramkörön? (Ezért itt külön nem jár pont, de érdekes: válaszoljunk számolás nélkül is, szimmetriák segítségével! (Persze ha valaki ezt helyesen megcsinálja és nem számol, az is teljes értékű megoldás.))

4.2 •• 50 százalék az esélye, hogy a királynő hordozza a hemofíliáért felelős gént. Ha hordozó, akkor mindegyik hercegnek 50-50 százalék az esélye arra, hogy hemofíliás legyen. Ha a királynő három fia nem hemofíliás, mekkora az esélye annak, hogy a királynő hordozó? Ha születik egy negyedik herceg is, mekkora az esélye annak, hogy hemofíliás lesz?

4.3 5 férfit és 5 nőt rangsorolnak egy vizsgán. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma pontszám, és mind a 10! elrendezés egyformán valószínű. Legyen X a legjobb nő helyezése (például $X = 1$ azt jelenti, hogy a legjobb vizsgázó egy nő). Határozzuk meg X eloszlását és várható értékét.

4.4 Öt játékos, A, B, C, D, E között véletlenszerűen szétosztjuk a számokat 1-től 5-ig, ismétlődés nélkül. Először A és B mérkőzik: akinek magasabb a száma, továbbjut. Az így továbbjutó most C-vel mérkőzik, azután a közülük továbbjutó D-vel, majd az itt nyertes E-vel. Legyen X az a szám, ahány mérkőzést A nyer. Határozzuk meg X eloszlását.

4.5 Egy családban $n \geq 1$ gyermek αp^n valószínűséggel van, ahol $\alpha \leq (1 - p)/p$.

a) A családok hányadrészében nincs gyermek?

b) Ha a gyermekek egymástól függetlenül egyforma eséllyel fiúk és lányok, akkor a családok hányadrészében lesz pontosan k fiú (és tetszőleges számú lány)?

Bónusz: Hamis érmével dobunk, de nem tudjuk, hogy mennyire torzít az érme. Előzetesen annyit elárult nekünk a torz-érme gyár, hogy egyenletesen torzítják az érméket, vagyis mindenféle $p \in [0, 1]$ egyenletesen fordul elő. Az első írást n.-szerre dobtuk (addig csupa fejet). Mit tippelünk, mekkora a p? (Mi a legvalószínűbb p?) Alulról illetve felülről (0-tól c-ig illetve c-től 1-ig) mekkora intervallumnak van már elég nagy (mondjuk 0.95-ös) valószínűsége, hogy oda esik a p?

4.6 Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymásután n-szer dobunk.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? ($k = 1, 2, \ldots, n$)

b) Feltéve, hogy mind az első $k - 1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$)

4.7 •• Egy ketyere két különböző okból romolhatott el. Az első ok ellenőrzése E_1 forintba kerülne, és ha valóban az a probléma, akkor a javítása J_1 forint. Hasonlóan, a második ok ellenőrzése E_2 forintba kerül, és ha az a probléma, akkor a javítás J_2 forint. (Ha viszont az először ellenőrzött oknál nincs probléma, akkor a másik lehetséges okot először ellenőriznünk kell, majd javítanunk.) Legyen p és $1 - p$ annak valószínűségei, hogy a ketyere az első illetve a második okból romlott el. Határozzuk meg, mely E_1, E_2, J_1, J_2, p értékek mellett érdemesebb várhatóan az első okkal kezdeni az ellenőrzést, és melyeknél a második okkal.

4.8 A Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatóak: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ában engedik előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ában. Láttam, hogy Jancsi előre engedte Juliskát, Jutkát viszont nem.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsi az udvariatlan kategóriába tartozik?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után Jancsi Erzsit is előre fogja engedni?

4.9 Sárkányföldön az n fejű sárkány

$$p_n = \binom{6}{n-1} \cdot 0.7^{n-1} \cdot 0.3^{7-n}$$

valószínűséggel fordul elő ($n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7$). Egy sárkány fejeinek levágása veszélyes művelet: az ember minden fejét egymástól függetlenül 90% eséllyel tudja levágni, és ha ez nem sikerül, akkor a sárkány megeszi az embert.

a) • Elém kerül egy sárkány, de a nagy ködben nem látom, hogy hányfejű. Mi az esélye, hogy túlélem a találkozást?

b) • Tegyük fel, hogy épp most vágtam le a hatodik fejét, de még mindig nem látom, hogy maradt-e feje. Ilyen helyzetből mekkora valószínűséggel élem túl a harcot?

c) • Csata után találkozom a cimborámmal, aki szintén legyőzött egy sárkányt. Ezt figyelembe véve mi a valószínűsége, hogy hétfejűvel volt dolga?

4.10 Két dobókockát dobálunk, és mindig az összeget tekintjük.

a) Addig dobunk, míg a két kockán lévő pöttyök összege 7 nem lesz. Mi a valószínűsége, hogy nem dobtunk előtte 11-et?

b) Most addig dobunk, míg a dobott összeg 7 vagy 11 nem lesz. Mi a valószínűsége, hogy amikor megállunk, 7 az összeg?

c) Lássuk be, hogy a dobások száma a b) feladatban és az, hogy mennyi az összeg megálláskor, függetlenek.

4.11 • Amerikában egy esküdtszék elítéli a vádlottat, ha a 12 esküdtből legalább 8 bűnösnek szavazza a vádlottat. Ha minden esküdt θ valószínűséggel dönt helyesen, akkor mi a valószínűsége a helyes döntésnek? Tegyük fel, hogy a vádlott p valószínűséggel bűnös valójában.

4.12 Kaszinóban az alábbi játékot játszuk: Minden lépésben fogadunk előre az $i = 1, 2, \ldots, 6$ számok valamelyikére, majd feldobnak 3 kockát. Ahányszor kijött a fogadott számunk, annyi petákot kapunk, ellenben fizetnünk kell 1 petákot, ha egyszer sem jött ki a fogadott szám. Fair-e a játék?

4.13 •• Egy n komponensű rendszer alkatrészei egymástól és a múltjuktól is függetlenül minden nap p valószínűséggel meghibásodnak, de ezeket esténként kijavítjuk. A rendszer leáll, ha legalább k alkatrész meghibásodott. Mi annak a valószínűsége, hogy először a t. napon áll le a rendszer?

4.14 •• Pólya urna: Egy urnában kezdetben a piros és b kék golyó van. Minden egyes lépésben kihúzunk egy golyót, megnézzük, milyen színű, majd őt és egy vele megyegyező színű golyót visszateszünk. (Vagyis a golyók száma az urnában minden lépésben eggyel nő). A t. lépéskor mi annak a valószínűsége, hogy kék golyót húzunk?

4.15 A Gombóc Artúr csokigyár nagyon sok csokit gyárt, és egy kampányukban szabályos dobókockával döntötték el, hogy a csokik hanyadrésze (mindegyik, fele, harmada, ..., hatoda) nyer. Persze az eredményt nem hozták nyilvánosságra. A haverommal veszünk egy-egy Gombóc Artúr csokit. Ő bontja ki először, és nyer a csokijával. Mi az esélye, hogy én is nyerni fogok a magaméval?

5. HF: 5.1 •• Egymás után nyolcszor dobunk egy szabályos érmével. Legyen X az egymás utáni egyforma kimenetelekből álló sorozatok száma, vagyis pl. csupa fej esetén $X = 1$, a $FFIIIIFI$ sorozatnál pedig $X = 4$. Határozzuk meg X eloszlását.

5.2 •• 5 buszon összesen 180 tanuló utazik. Az egyes buszok rendre 38, 33, 27, 53 es 29 tanulót szállítanak. Válasszunk ki véletlenszerűen egy tanulót; ekkor jelölje X azt, hogy hány tanuló utazik azon a buszon, amelyik a kiválasztott tanulót szállítja. Válasszunk véletlenszerűen egy sofőrt. Y jelölje azt, hogy a sofőr buszán hány tanuló utazik.

a) Mit gondolunk, X vagy Y várható értéke nagyobb? Miért?

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{E}(Y)$-t!

c) Számoljuk ki $\mathbf{D}^2(X)$-et és $\mathbf{D}^2(Y)$-t is!

5.3 Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

5.4 A és B a következő játékot játssza: A gondol 1-re vagy 2-re, ezt leírja, majd B-nek ki kell találnia, melyik számra gondolt A. Ha az A által leírt szám i és B jól tippelt, akkor B i egységet kap A-tól. Ha B melléfog, akkor ő fizet A-nak $\frac{3}{4}$-t. Ha B randomizálja tippjét, azaz p valószínűséggel tippel 1-re és $1-p$ valószínűséggel 2-re, határozzuk meg nyereménye várható értékét, amennyiben

a) az A által leírt szám az 1,

b) az A által leírt szám a 2.

Milyen p érték maximalizálja B minimális várható nyereményét, és mi ez a maximin érték? (Figyeljük meg, hogy B várható nyereménye nem csak p-től függ, hanem attól is, hogy mit csinál A.)
Tekintsük most az A játékost. Tegyük fel, hogy ő is randomizálja a döntését, és q valószínűséggel gondol 1-re. Mennyi A várható vesztesége,

a) ha B 1-re tippel, ill.

b) ha B 2-re tippel?

Mely q értékkel tudja A minimalizálni a maximális várható veszteségét? Mutassuk meg, hogy A maximális várható veszteségének minimuma egyenlő B minimális várható nyereségének maximumával! Ezt az eredményt hívják minimax tételnek, ami a játékelmélet egyik alapvető eredménye, és általánosan először Neumann János fogalmazta meg. A közös értéket a játék értékének hívják (B számára).

5.5 Egy gép véletlenszerűen választ 1 és 10 közötti számot, amit nekünk kell kitalálni, úgy, hogy kérdéseket teszünk fel, amire a gép igennel vagy nemmel válaszol. Számoljuk ki, várhatóan hány kérdést kell a gépnek feltennünk,

a) ha csak rákérdezhetünk, azaz azt kérdezzük, hogy „A gondolt szám i?” $i = 1, 2, \ldots, 10$, illetve

b) ha kérdéseinkkel mindig megpróbáljuk megfelezni a fennmaradó lehetséges számok körét.

5.6 **(Szentpétervári paradoxon)** Egy érmével addig dobunk, míg a fej oldalára nem esik. Ha az n-edik feldobás eredménye fej, akkor a játékos 2^n forintot nyer. Mutassuk meg, hogy a nyeremény várható értéke végtelen!

a) Megéri-e egy játékért 1 millió forintot fizetni?

b) Megéri-e játékonként 1 millió forintot fizetni, ha annyiszor játszunk, ahányszor csak akarunk, és csak az összes játék befejezése után van elszámolás?

5.7 •• Minden este több különböző meteorológus jósolja meg, mekkora valószínűséggel fog holnap esni az eső. Hogy megítéljük, mennyire jók a meteorológusok, a következőképpen pontozzuk őket: ha egy meteorológus p valószínűséggel jósolt esőt, akkor

$$\begin{array}{ll} 1-(1-p)^2 & \text{pontot kap, ha valóban esik másnap,} \\ 1-p^2 & \text{pontot kap, ha nem esik.} \end{array}$$

Ezek után egy rögzített időszakban mérjük az egyes meteorológusok átlagpontszámát, és a legjobb előrejelző a legmagasabb pontszámot kapott meteorológus lesz. Tegyük fel, hogy az egyik meteorológus tudja ezt, és maximalizálni szeretné átlagát. Ha azt gondolja, hogy p^* valószínűséggel fog esni holnap, mekkora p értéket érdemes jelentenie?

5.8 Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha

a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses húzások),

b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).

5.9 Egy csütörtöki buliba az n meghívott mindegyike a többiektől függetlenül $1/2$ valószínűséggel jön el. Mennyi a valószínűsége, hogy a meghívottak legalább fele eljön? És, ha a hónap négy csütörtökjén szervezek bulit, mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább kettő, amin elegen leszünk (azaz a meghívottak legalább fele eljön)?

5.10 •• Két kockával (egyik piros, másik zöld) dobva, mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke? Dobtam a két kockával, háromszor: az egyik kockát, a pirosat mindig meglestem, hihetetlen, de mindháromszor 3-as szerepelt rajta. Mi a valószínűsége, hogy legalább egyszer nagyobb volt, mint a zöldön lévő, éppen akkor dobott szám?

Bónusz: n darab k-lapú „kockával” dobva mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke?

5.11 **a)** Háromszor dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $3/8$. Jelölje X a fej dobások számát. Számoljuk ki X várható értékét és szórását!

b) Háromszor dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $3/8$. Jelölje U azt a számot, ahányszor sikerül az előző dobást megismételnünk. (Így U értéke 0, 1 vagy 2 lehet.) Számoljuk ki U várható értékét és szórását!

5.12 •• Legyen $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, számoljuk ki

a) $\mathbf{E}(3+5X)^2$-t és

b) $\mathbf{D}^2(2+7X)$-t.

5.13 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i).$$

(*Tipp:* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \mathbf{P}(N = k)$. *És most szummacsere!*)

5.14 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N > i) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)\big).$$

5.15 Egy m családból álló közösségben n_i családban van i gyerek ($\sum_{i=1}^{r} n_i = m$). Legyen X egy véletlenszerűen választott családban a gyerekek száma. Válasszunk ki véletlenszerűen a $\sum_{i=1}^{r} in_i$ gyerek közül egyet; jelölje Y azt, hogy a kiválasztott gyerek családjában hány gyerek van. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(Y) \geq \mathbf{E}(X)$.