

Feladatmegoldó szeminárium 2.

7. óra

2015. március 23./ március 25.

1. Egy 32 fős osztály vetélkedősorozatot tervez. Minden fordulóban két csapat vetélkedik tetszőleges létszámmal. Azt szeretnénk, hogy a vetélkedősorozat folyamán bármely két diák legalább egyszer egymás ellenfele legyen (azaz legyen olyan forduló, amikor különböző csapatban szerepelnek). Legkevesebb hány fordulóban lehet a versenyt lebonyolítani?
2. (Banach fixpont-tétel.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum (véges vagy végtelen, akár $I = \mathbb{R}$ is lehet), és $f : I \rightarrow I$ függvény. Azt mondjuk, hogy f kontrakció I -n, ha létezik olyan $0 < c < 1$, amelyre

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

Mutassuk meg, hogy ha f kontrakció, akkor f -nek pontosan 1 fixpontja van I -ben! Mire következtethetünk az $x, f(x), \dots, \underbrace{f \circ \dots \circ f(x)}_n, \dots$ sorozattal kapcsolatban?

3. Igazoljuk, a $g(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$ függvény nem periodikus.
4. Adott egy 15 csúcsú összefüggő gráf. Legyen A az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy a gráf szomszédsági mátrixának főátlójába 1-eseket írunk, a többi elemet pedig változatlanul hagyjuk. Bizonyítsuk be, hogy A^{20} minden eleme pozitív.
5. Fedjük le a természetes számokat minél kevesebb különböző, de 1-nél nagyobb differenciájú számtani sorozattal!

Beadandó feladatok

19. Legyen $A \subset [0, 1]$ azon számok halmaza, melyek tízes számrendszerbeli alakjában nem szerepel a 8-as számjegy. Bizonyítsuk be, hogy A nullmértékű, azaz minden pozitív ε -ra lefedhető legfeljebb ε összhosszúságú intervallumokkal. (3 pont)
20. Tudjuk, hogy az A szimmetrikus $2n + 1 \times 2n + 1$ -es mátrix ($n \geq 0$) minden sorában és minden oszlopában az $1, \dots, 2n + 1$ számok vannak felsorolva valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy akkor a főátlójában is az $1, \dots, 2n + 1$ számok mindegyike pontosan egyszer szerepel. (3 pont)
21. Le lehet-e fedni a természetes számokat véges sok különböző, 1-nél nagyobb differenciájú *diszjunkt* számtani sorozattal? (5 pont)