

Feladatmegoldó szeminárium 2.

11. óra

2015. 04. 27. / 29.

1. Az ibibiók nyelve 37 betűt tartalmaz. Egy szóban tetszőleges két egymás mellett álló azonos betűsorozat jelentésváltozás nélkül elhagyható. Hány különböző jelentésű szó van a nyelvükben?
2. Legyen A egy téglalap alakú valós mátrix, melynek m sora és n oszlopa van ($m \leq n$). Bizonyítsuk be, hogy $A^T A$ sajátértékei éppen AA^T sajátértékei és még $n - m$ darab 0.
3. Legyen $a_n > 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan b_n sorozat, melyre $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.
4. Egy \mathbb{R}^3 -beli halmaz azt tudja, hogy bármely síkkal vett metszete egy körlap. Igazoljuk, hogy ez egy gömb!
5. Béla és Jenő a következő játékot úzik: feldobnak egy szabályos érmét, és ha fej jön ki, Béla fizet Jenőnek 1 forintot, ha írás jön ki, Jenő fizet Bélának 1 forintot. Béla 2, Jenő 4 forinttal kezdi a játékot, és addig játszanak, amíg valamelyikük pénze el nem fogy. Mekkora a valószínűsége annak, hogy Jenő pénze fogy el előbb (azaz Béla nyer)?
6. Vegyük a \mathbb{Z}^2 rácsot a síkon, és legyen P egy rácssokszög: csúcsai rácspontok, oldalai a rácsra nem feltétlen illeszkedő egyenes szakaszok. Jelölje P területét $t(P)$, a P határán lévő rácspontok számát (a csúcsokkal együtt) $h(P)$, a belsejében lévők számát pedig $i(P)$. Mutassuk meg, hogy

$$t(P) = i(P) + h(P)/2 - 1.$$

Beadandó feladatok

31. Az órai 5. feladatot tekintve, várhatóan hány lépés után ér véget a játék? (3 pont)
32. Egy $20m \times 20m$ -es négyzet alakú mező négy sarkában áll négy ugyanolyan kutya, majd sípszóra mindegyik elindul az óra mutató járásának megfelelő szomszédja felé, minden pillanatban pontosan felé tartva. Egy perc alatt 10 métert haladnak. Hol és mikor találkoznak a kutyák? (3 pont)
33. Legyen $a_n > 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan b_n sorozat, melyre $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \infty$, amint $n \rightarrow \infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. (5 pont)

Konzultáció 2015. 04. 29-én 12:00-tól a H607-ben.

ZH 2015. 05. 04-én 16 órától a K150 teremben.