33. Legyen az $X_1, X_2, \dots, X_n$ minta elemeinek sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = x^{a-2}(a-1)$$

a $(0, 1)$ intervallumon, különben 0 ($a > 1$ az ismeretlen paraméter). Adjunk torzítatlan és konzisztens becslést $\frac{1}{a}$-ra.

50. Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ Pascal-eloszlású minta.

(a) Adjunk X_1 függvényével torzítatlan becslést $p(1-p)$-re.

(b) Adjunk meg elégséges statisztikát.

(c) Az (a)-ban megadottnál konstruáljunk jobb becslést a Rao–Blackwell-tétel segítségével.

70. Mekkora az $X_1, X_2, \dots, X_n$ minta Fisher-információja, ha a mintaelemek sűrűségfüggvénye

(a) $f(x; \vartheta) = \dfrac{\vartheta}{(1+x)^{\vartheta+1}}$, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként ($\vartheta > 0$)?

(b) $f(x; \vartheta) = 2\vartheta^2 x^3 e^{-\vartheta x^2}$, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként ($\vartheta > 0$)?

71. Mekkora az egy mintaelemben levő Fisher-információ, ha a sűrűségfüggvény

$$f(x; \vartheta) = \frac{\vartheta + 1}{2\vartheta}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/\vartheta}, \quad \text{ha } -1 < x < 1,$$

ahol ϑ pozitív paraméter?

33.

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \{x^{a-2}(a-1)\}dx = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a},$$

tehát $1 - \overline{X}$ torzítatlan becslés $1/a$-ra. A konzisztencia abból következik, hogy

$$D^2(1-\overline{X}) = D^2(\overline{X}) = \frac{D^2(X)}{n} \to 0.$$

50. (a) $P(X_1 = 2) = p(1-p)$, tehát $T(X_1) = I(X_1 = 2)$ torzítatlan becslés.
(b) $P(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{k_i - 1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^n k_i - n}$, tehát $S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ elégséges statisztika.

(c)

$$E(T|S=k) = \frac{P(X_1 = 2, \sum_{i=1}^n X_i = k)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = k)} = \frac{P(X_1 = 2, \sum_{i=2}^n X_i = k-2)}{\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}} =$$

$$= \frac{p(1-p)\cdot\binom{k-3}{n-2}p^{n-1}(1-p)^{(k-2)-(n-1)}}{\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}} = \frac{(n-1)(k-n)}{(k-1)(k-2)}$$

(ha $k > n$, és 0 különben). Tehát a becslésünk

$$\widehat{p(1-p)} = \frac{(n-1)(\sum_{i=1}^n X_i - n)}{(\sum_{i=1}^n X_i - 1)(\sum_{i=1}^n X_i - 2)}.$$

70. (a) Jól látható, hogy az eloszlások egyparaméteres exponenciális családot alkotnak, ezért a bederiválhatósági feltételek teljesülnek. Így

$$I_n(\vartheta) = nI_1(\vartheta) = -nE_\vartheta\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}l(\vartheta; X_1)\right) = \frac{n}{\vartheta^2}.$$

(b) Hasonlóan kapható $I_n(\vartheta) = 2n\vartheta^{-2}$.