Kedves Hallgatók!

A Taylor polinom témakör átkerült az Építész Matemaika I-ből a II-be. Azért, hogy kényelmesen egy forrásból olvashassátok a tananyagot a következő jegyzetekből összegyűjtöttem a releváns részeket:

- Barabás Béla és Fülöp Ottília: Az építészek matematikája I.
- Thomas-féle kalkulus, III. kötet

4.8. Egyéb alkalmazások: függvények érintkezése, Taylor-polinom

4.8.1. Definíció: Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ az $x = x_0$ helyen és ennek egy környezetében $(n+1)$-szer differenciálható függvények. A két függvény grafikonja az x_0 helyen n*-edrendben érintkezik*, ha $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$,..., $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, de $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$.

Például az $f(x)$ és $g(x)$ az $x = x_0$ helyen nulladrendben érintkeznek, ha a két grafikon metszi egymást az $x = x_0$ helyen, de ott már nincs közös érintőjük. Ha az is lenne, akkor legalább elsőrendben érintkeznének. Másodrendben érintkezik az előbb említett két függvény, amennyiben $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$, de $f'''(x_0) \neq g'''(x_0)$.

4.8.2. Definíció: Az $f(x)$ függvény x_0 *helyhez tartozó simuló* (vagy *görbületi) köre* egy olyan kör, mely az adott függvényt másodrendben érinti.

4.8.3. Tétel: A simuló kör sugara $r = \dfrac{\sqrt{\left[1+\left(f'(x_0)\right)^2\right]^3}}{f''(x_0)}$. Ennek reciprokát pedig az x_0 *helyhez tartozó görbületnek* nevezzük és G -vel jelöljük.

4.8.4. A Taylor-polinom definíciója és szemléletes bevezetése: Tekintsünk egy $f(x)$ függvényt, mely az $x = x_0$ helyen és ennek egy környezetében $(n+1)$-szer differenciálható. Olyan polinomot keresünk, mely az $f(x)$ függvénnyel (ami esetleg lehet „nehezebben kezelhető”) n-edrendben érintkezik az x_0 helyen. Ez lesz a keresett *Taylor-polinomunk*.

Jelöljük a keresendő polinomot $T_{f,n,x_0}(x)$-al. Mivel az x_0 gyöke a polinomnak, felírhatjuk, hogy $T_{f,n,x_0}(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$. Felhasználva, hogy

$$T_{f,n,x_0}{}'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$T_{f,n,x_0}{}''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$T_{f,n,x_0}{}'''(x)=6a_3+\ldots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3},$$

$$\ldots$$

$$T_{f,n,x_0}{}^{(n)}(x)=n!a_n.$$

Behelyettesítve a fentiekbe az $x=x_0$ értéket, megkapjuk mindegyik a_i együtthatót, így a keresett Taylor-polinom: $T_{f,n,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

4.8.5. Definíció: Az $x_0=0$ helyen felírt Taylor-polinomot *Mac Laurin-polinomnak* is nevezzük. Ez tehát a $T_{f,n,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ polinom.

4.8.6. Néhány példa Mac Laurin-polinomra: $e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ (triviális belátni, hiszen az e^x exponenciális függvény bármilyen rendű deriváltjába nullát beírva 1-et kapunk).

Ebből az $x\mapsto -x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$e^{-x}\approx 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

A kettőt összeadva és 2-vel elosztva felírhatjuk, hogy

$$chx\approx 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Kivonással és 2-vel való osztással felírhatjuk a shx függvény Mac Laurin-polinomját is:

$$shx\approx\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Könnyű belátni (deriválással), hogy

$$\sin x\approx\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\quad \text{míg}\quad \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

FELADAT

VEZESD LE A FENTI FORMULÁKAT !

11.8. Feladatok

THOMAS-KALKULUS

Taylor-polinomok

Írjuk fel a függvény nullad-, első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomjait a megadott helyen (1–8. feladatok)!

1. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
2. $f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$
3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
4. $f(x) = 1/(x+2), \quad a = 0$
5. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4$
6. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/4$
7. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$
8. $f(x) = \sqrt{x+4}, \quad a = 0$

KIEGÉSZÍTŐ KÉRDÉS

AZ ADÓDÓ TAYLOR POLINOMOKKAL KÖZELÍTSD AZ $\ln(1{,}05)$ ÉRTÉKÉT!

A zh anyag eddig tart. De érdemes átolvasni a következő link tartalmát az 1. példa végéig:

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_thomas_kalkulus_3/ch02s09.html