2. MATEMATIKA A2 FELADATSOR - MEGOLDÁSOK

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát (ha az egy intervallum, akkor az integvallum végpontjait is meg kell vizsgálni):

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-3)^n$

   $a=3$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, így a konvergenciasugár

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2$$

   Tehát a $]3-2, 3+2[=]1,5[$ nyílt intervallumban biztos konvergens. Még a végpontokat kell megvizsgálni:

   $x=1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ végtelen sort kapjuk, ami divergens, mert $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = 0$ nem teljesül.

   $x=5$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(5-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ végtelen sort kapjuk, ami divergens, mert $\lim_{n\to\infty} 1^n = 0$ nem teljesül.

   Tehát a konvergenciatartomány az $]1,5[$ nyílt intervallum.

   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(x-1)^n$

   $a=1$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, így a konvergenciasugár

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

   Tehát a $]1-1, 1+1[=]0,2[$ nyílt intervallumban biztos konvergens. Még a végpontokat kell megvizsgálni:

   $x=0$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ végtelen sort kapjuk, ami egy alternáló sor, ahol az előjel nélküli n-edik tag: $|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ami monoton csökkenve tart a 0-hoz, ezért a Leibniz-kritérium szerint konvergens.

   $x=2$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ végtelen sort kapjuk, ami a p-szabály szerint divergens (p-szabály: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergens, ha $p>1$ és divergens, ha $p \le 1$.)

   Tehát a konvergenciatartomány az $[0,2[$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

   c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x-3)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2(x-1,5))^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x-1,5)^n,$$

   ezért $a=1,5$, $a_n = \frac{2^n}{n^2}$, így a konvergenciasugár

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

Tehát a $]1,5-0,5;1,5+0,5[=]1,2[$ nyílt intervallumban biztos konvergens. Még a végpontokat kell megvizsgálni:

$x=1$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(2\cdot 1-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ végtelen sort kapjuk, ami egy alternáló sor, ahol az előjel nélküli n-edik tag: $|\frac{(-1)^n}{n^2}|=\frac{1}{n^2}$, ami monoton csökkenve tart a 0-hoz, ezért a Leibniz-kritérium szerint konvergens.

$x=2$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(2\cdot 2-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ végtelen sort kapjuk, ami a p-szabály szerint konvergens

Tehát a konvergenciatartomány az $[1,2]$ zárt intervallum.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+2)^n}{10^{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+2)^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3(x+\frac{2}{3}))^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{10^{n+1}}(x+\frac{2}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{10^{n+1}}(x-(-\frac{2}{3}))^n$$

ezért $a=-\frac{2}{3}$, $a_n=\frac{3^n}{10^{n+1}}$, így a konvergenciasugár

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{10^{n+1}}}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{3}{10\sqrt[n]{10}}}=\frac{1}{\frac{3}{10}}=\frac{10}{3}$$

Tehát a $]-\frac{2}{3}-\frac{10}{3};-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}[=]-4,\frac{8}{3}[$ nyílt intervallumban biztos konvergens. Még a végpontokat kell megvizsgálni:

$x=-4$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3(-4)+2)^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10}$ végtelen sort kapjuk, ami divergens, mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{10}=0$ nem teljesül.

$x=\frac{8}{3}$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3\cdot\frac{8}{3}+2)^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10}$ végtelen sort kapjuk, ami divergens, mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}=0$ nem teljesül.

Tehát a konvergenciatartomány az $]-4,\frac{8}{3}[$ nyílt intervallum.

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x+5)^n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x+5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x-(-5))^n$ ezért $a=-5$, $a_n=\frac{n}{3^n}$, így a konvergenciasugár

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

Tehát a $]-5-3,-5+3[=]-8,-2[$ nyílt intervallumban biztos konvergens. Még a végpontokat kell megvizsgálni:

$x = -8$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(-8+5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ végtelen sort kapjuk, ahol a $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = 0$ nem teljesül, ezért a végtelen sor divergens.

$x = -2$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(-2+5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} n = \sum_{n=1}^{\infty} n$ végtelen sort kapjuk, ahol a $\lim_{n\to\infty} n = 0$ nem teljesül, ezért a végtelen sor divergens.

Tehát a konvergenciatartomány az $]-8,-2[$ nyílt intervallum.

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-(-4))^n$ tehát $a = -4$ és $a_n = \frac{1}{n!}$. Ekkor $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, ezért a konvergenciasugár

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty,$$

emiatt a $KT = \mathbb{R}$.

g. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n!(2(x-0,5))^n = \sum_{n=1}^{\infty} n!2^n(x-0,5)^n$, ezért $a = \frac{1}{2}$ és $a_n = 2^n n!$. Igy $a_{n+1} = 2^{n+1}(n+1)!$, ezért a konvergenciasugár

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0,$$

emiatt a $KT = \{\frac{1}{2}\}$.

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x-0)^n$, ezért $a = 0$ és $a_n = \frac{1}{n+1}$, így a konvergenciasugár

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1}} = 1$$

Tehát a $]0-1, 0+1[=]-1,1[$ nyílt intervallumban biztos konvergens. Még a végpontokat kell megvizsgálni:

$x = -1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ végtelen sort kapjuk, ami egy alternáló sor, ahol az előjel nélküli n-edik tag: $|\frac{(-1)^n}{n+1}| = \frac{1}{n+1}$, ami monoton csökkenve tart a 0-hoz, ezért a Leibniz-kritérium szerint konvergens.

$x = 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(1-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ végtelen sort kapjuk, ami a p-szabály szerint divergens.

Tehát a konvergenciatartomány az $[-1,1[$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

2. Határozza meg az alábbi függvények Taylor-sorainak első három nemnulla tagját a definíció alapján:

a. $f(x) = e^x, a = 0$

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ezért $f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^0 = 1$, $f''(0) = e^0 = 1$. Így a Taylor-sor

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$$

b. $f(x) = \sqrt{x}, a = 1$

$f(x) = x^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, ezért $f(1) = 1^{1/2} = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}1^{-1/2} = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{4}1^{-3/2} = -\frac{1}{4}$. Így a Taylor-sor

$$f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots = 1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{-1/4}{2!}(x-1)^2+\cdots = 1+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{8}+\ldots$$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}, a = 0,$

$f(x) = (1+x)^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$, ezért $f(0) = 1^{1/3} = 1$, $f'(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^{-2/3} = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9} \cdot 1^{-5/3} = -\frac{2}{9}$. Így a Taylor-sor

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{3}(x-0) + \frac{-2/9}{2!}(x-0)^2 + \cdots = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \ldots$$

d. $f(x) = \ln x, a = 1$

$f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, ezért $f(1) = \ln 1 = 0$, $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$, $f''(1) = -1^{-2} = -1$, $f'''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = -2$. Így a Taylor-sor:

$$f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots = 0+1(x-1)+\frac{-1}{2!}(x-1)^2+\frac{-2}{3!}(x-1)^3+\cdots =$$
$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots$$

e. $f(x) = \sin x, a = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, ezért $f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$, $f'''(\frac{\pi}{2}) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $f^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Így a Taylor sor

$$f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{f'''(\frac{\pi}{2})}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3 + \frac{f^{(4)}(\frac{\pi}{2})}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 + \cdots =$$
$$1 + 0(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{-1}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{0}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3 + \frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 + \cdots = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{24} + \ldots$$

f. $f(x) = \cos x, a = \pi$

$f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, ezért $f(\pi) = \cos\pi = -1$, $f'(\pi) = -\sin\pi = 0$, $f''(\pi) = -\cos\pi = 1$, $f'''(\pi) = \sin\pi = 0$, $f^{(4)}(\pi) = \cos\pi = -1$. Így a Taylor sor

$$f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4 + \cdots =$$
$$-1 + 0(x-\pi) + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{0}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{-1}{4!}(x-\pi)^4 + \cdots = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \ldots$$

3. Határozza meg az alábbi függvények Taylor-sorát az $a = 0$-ban a nevezetes hatványsorokat használva:

a. $f(x) = e^{2x}$

Az e^x hatványsora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

ezért az e^{2x} hatványsora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots$$

b. $f(x) = \cos 3x$

A $\cos x$ hatványsora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots$$

ezért a $\cos 3x$ hatványsora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^4}{4!} - \frac{729x^6}{6!} + - \dots$$

c. $f(x) = \sin 4x$

A $\sin 4x$ hatványsora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

ezért a $\sin 4x$ hatványsora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 4x - \frac{64x^3}{3!} + \frac{1024x^5}{5!} - \frac{16384x^7}{7!} + - \dots$$

d. $f(x) = \ln(1 - 2x)$

Az $\ln(1 - x)$ Taylor-sora

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + -$$

ezért az $\ln(1 - 2x)$ Taylor-sora

$$(-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \frac{(-2x)^4}{4} + - = -2x - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} - \dots$$

e. $f(x) = \cos^2 x$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, ezért a $\cos x$ Taylor-sora alapján $\cos^2 x$ Taylor-sora

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + -) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + -$$

f. $f(x) = \sin^2 2x$

$\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$, ezért a $\sin x$ Taylor-sora alapján $\sin^2 2x$ Taylor-sora

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^4}{4!} - \frac{(4x)^6}{6!} + -) = 4x^2 - \frac{16x^4}{3} + \frac{128x^6}{45} - +$$

g. $f(x) = shx$

$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$, ezért az e^x hatványsora alapján shx hatványsora

$$\frac{1}{2}(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) - \frac{1}{2}(1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \dots) =$$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

h. $f(x) = ch3x$

$ch3x = \frac{e^{3x} + e^{3x}}{2} = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$, ezért az e^x hatványsora alapján shx hatványsora

$$\frac{1}{2}(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + \dots) + \frac{1}{2}(1 + (-3x) + \frac{(-3x)^2}{2!} + \frac{(-3x)^3}{3!} + \frac{(-3x)^4}{4!} + \dots) =$$

$$1 + \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^4}{4!} + \dots$$