4. MATEMATIKA A2 FELADATSOR - MEGOLDÁSOK

Ha $f(x)$ egy páros függvény, akkor a Fourier-sor együtthatói:

$$b_n = 0, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx.$$

Ha $f(x)$ egy páratlan függvény, akkor a Fourier-sor együtthatói:

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx.$$

1. Határozza meg az alábbi 2π-szerint periodikus függvények Fourier-sorának első öt nemnulla tagját:

a $f(x) = |x|$, ha $-\pi < x < \pi$

$f(x)$ egy páros függvény, emiatt $b_0 = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |x|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Az a_n kiszámolásánál parciálisan integrálunk $u = x$, $v' = \cos nx$ választással, ezért $u' = 1$, $v = \frac{\sin nx}{n}$. Tehát

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\frac{\sin nx}{n}dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\pi\frac{\sin n\pi}{n} - 0\cdot\frac{\sin(n\cdot 0)}{n} - \left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{\cos(n\cdot 0)}{n^2}\right) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Tehát $a_1 = -\frac{4}{\pi}$, $a_3 = -\frac{4}{9\pi}$, $a_5 = -\frac{4}{25\pi}$, ... ezért a Fourier sor:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x - \dots$$

b $f(x) = \pi - |x|$, ha $-\pi < x < \pi$

$f(x)$ egy páros függvény, emiatt $b_0 = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \pi - |x|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \pi - x dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Az a_n kiszámolásánál parciálisan integrálunk $u = \pi - x$, $v' = \cos nx$ választással, ezért $u' = -1$, $v = \frac{\sin nx}{n}$. Tehát

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - |x|)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -1\cdot\frac{\sin nx}{n}dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left((\pi - \pi)\frac{\sin n\pi}{n} - (\pi - 0)\cdot\frac{\sin(n\cdot 0)}{n} - \left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \left(-\frac{\cos(n\cdot 0)}{n^2}\right)\right) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2\pi} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{4}{n^2\pi} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Tehát $a_1 = \frac{4}{\pi}$, $a_3 = \frac{4}{9\pi}$, $a_5 = \frac{4}{25\pi}$, ... ezért a Fourier sor:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{4}{25\pi}\cos 5x + \dots$$

c $f(x) = x^2$, ha $-\pi < x < \pi$

$f(x)$ egy páros függvény, emiatt $b_0 = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

Az a_n kiszámolásánál parciálisan integrálunk $u = x^2$, $v' = \cos nx$ választással, ezért $u' = 2x$, $v = \frac{\sin nx}{n}$. Tehát

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\cdot\frac{\sin nx}{n}dx\right) =$$

Megint parciálisan integrálunk $u = 2x$, $v' = \frac{\sin nx}{n}$ választással, ezért $u' = 2$, $v = -\frac{\cos nx}{n^2}$.

$$\frac{2}{\pi}\left(\pi^2\frac{\sin n\pi}{n} - 0^2\frac{\sin(n\cdot 0)}{n} - \left(\left[-2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -2\frac{\cos nx}{n^2}dx\right)\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{\cos n\pi}{n^2} - 2\cdot 0\frac{\cos(n\cdot 0)}{n^2} - \left[\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \left(\frac{\sin n\pi}{n^3} - \frac{\sin(n\cdot 0)}{n^3}\right)\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Tehát $a_1 = -4$, $a_2 = 1$, $a_3 = -\frac{4}{9}$, ... Tehát a Fourier-sor

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \dots$$

d $f(x) = x$, ha $-\pi < x < \pi$

$f(x)$ egy páratlan függvény, emiatt $a_0 = 0$ és $a_n = 0$.

A b_n kiszámolásánál parciálisan integrálunk $u = x$, $v' = \sin nx$ választással, ezért $u' = 1$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$. Tehát

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos n\pi}{n} - \left(-0\cdot\frac{\cos(n\cdot 0)}{n}\right) + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n\pi)}{n^2} - \frac{\sin(n\cdot 0)}{n^2}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Tehát $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $b_3 = \frac{2}{3}$, ... ezért a Fourier sor:

$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots$$

e $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x \le \pi, \\ -1 & \text{ha } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$

$f(x)$ egy páratlan függvény, emiatt $a_0 = 0$ és $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{n} - \left(-\frac{\cos(n\cdot 0)}{n}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Tehát $b_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_3 = \frac{4}{3\pi}$, $b_5 = \frac{4}{5\pi}$,... Igy a Fourier-sor

$$\frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \dots$$

f $f(x) = -2x$, ha $-\pi < x < \pi$

$f(x)$ egy páratlan függvény, emiatt $a_0 = 0$ és $a_n = 0$.

A b_n kiszámolásánál parciálisan integrálunk $u = -2x$, $v' = \sin nx$ választással, ezért $u' = -2$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$. Tehát

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -2x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[2x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{\cos n\pi}{n} - \left(0\cdot\frac{\cos(n\cdot 0)}{n}\right) - \left[2\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi(-1)^n}{n} - \left(\frac{2\sin(n\pi)}{n^2} - 2\left(\frac{\sin(n\cdot 0)}{n^2}\right)\right)\right) = \frac{4(-1)^n}{n}$$

Tehát $b_1 = -4$, $b_2 = 2$, $b_3 = -\frac{4}{3}$, ... ezért a Fourier sor:

$$-4\sin x + 2\sin 2x - \frac{4}{3}\sin 3x - + \dots$$

g $f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{ha } -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}, \\ x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x < \pi, \end{cases}$

$f(x)$ egy páratlan függvény, emiatt $a_0 = 0$ és $a_n = 0$. A b_n kiszámolásánál parciálisan integrálunk először $u = x$, $v' = \sin nx$ választással, ahol $u' = 1$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$ majd $u = \pi - x$, $v' = \sin nx$ választással, ahol $u' = -1$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$. Tehát

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin nx dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos nx}{n}dx + \left[-(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\left(-\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n} - \left(-0\frac{\cos 0}{n}\right) + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(-(\pi-\pi)\frac{\cos n\pi}{n} - \left(-(\pi - \frac{\pi}{2})\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\right)\right) - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n} + \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2} - \frac{\sin 0}{n^2} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n} - \left(\frac{\sin(n\pi)}{n^2} - \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2}\right)\right) = \frac{4\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2\pi}$$

$$\frac{4\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{4}{n^2\pi} & \text{ha } n = 4k+1 \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{ha } n = 4k+3 \end{cases}$$

Tehát $b_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_3 = -\frac{4}{9\pi}$, $b_5 = \frac{4}{25\pi}$, $b_7 = -\frac{4}{49\pi}$, ... Tehát a Fourier-sor

$$\frac{4}{\pi}\sin x - \frac{4}{9\pi}\sin 3x + \frac{4}{25\pi}\sin 5x - \frac{4}{49\pi}\sin 7x + \cdots$$

2. Határozza meg az alábbi 2π-szerint periodikus függvények Fourier-sorát linearizálással:

a $f(x) = \sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

tehát $a_0 = \frac{1}{2}$ és $a_2 = -\frac{1}{2}$, a többi együttható 0.

b $f(x) = \cos^2 3x$

$$\sin^2 x = \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x,$$

tehát $a_0 = \frac{1}{2}$ és $a_4 = \frac{1}{2}$, a többi együttható 0.

c $f(x) = \sin x \sin 2x$

Mivel $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$, ezért $\alpha = 2x$ és $\beta = x$ választással

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x$$

tehát $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_3 = -\frac{1}{2}$, a többi együttható 0.

d $f(x) = \sin x \cos 3x$

Mivel $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$, ezért $\alpha = x$ és $\beta = 3x$ választással

$$\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin(-2x)) = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x$$

tehát $b_2 = -\frac{1}{2}$ és $b_4 = \frac{1}{2}$, a többi együttható 0.

e $f(x) = \cos 2x \cos 3x$

Mivel $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$, ezért $\alpha = 3x$ és $\beta = 2x$ választással

$$\cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 5x$$

tehát $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_5 = \frac{1}{2}$, a többi együttható 0.

f $f(x) = \sin^3 2x$

$$\sin^3 2x = \sin^2 2x \sin 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \cos 4x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\sin 6x + \sin(-2x)) =$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}(\sin 6x - \sin(2x)) = \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 6x$$

tehát $b_2 = \frac{3}{4}$ és $b_6 = -\frac{1}{4}$, a többi együttható 0.