5. MATEMATIKA A2 FELADATSOR

1. Oldja meg az alábbi kétismeretlenes lineáris egyenletrendszereket:

$$a.\quad \begin{aligned} x+2y&=7\\ 3x-y&=0\end{aligned} \qquad b.\quad \begin{aligned} 2x+5y&=18\\ x-y&=-5\end{aligned} \qquad c.\quad \begin{aligned} 2x+4y&=8\\ 3x+6y&=12\end{aligned} \qquad d.\quad \begin{aligned} 3x-6y&=9\\ 4x-8y&=13\end{aligned}$$

a.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7\\ 0 & -7 & -21\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right),$$

tehát $x+2y=7$ és $y=3$, ezért $x=1$.

b.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 18\\ 1 & -1 & -5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5\\ 2 & 5 & 18\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5\\ 0 & 7 & 28\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5\\ 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

tehát $x-y=-5$ és $y=4$, ezért $x=-1$.

c.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8\\ 3 & 6 & 12\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 3 & 6 & 12\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

tehát $x+2y=4$. Az y oszlopába nincs vezéregyes, ezért szabadon választhatom. Ha $y=s$, $s\in\mathbb{R}$, akkor $x=4-2y=4-2s$.

d.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 9\\ 4 & -8 & 13\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3\\ 4 & -8 & 13\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

tehát $x-2y=3$ és $0=1$, ezért nincs megoldás.

2. Oldja meg az alábbi háromismeretlenes lineáris egyenletrendszereket:

$$a.\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=14\\ 2x+6y+14z&=56\\ 4x+7y+9z&=45\end{aligned} \qquad b.\quad \begin{aligned} 2x-y+5z&=-14\\ 3x+y+2z&=-5\\ x+y+z&=-1\end{aligned} \qquad c.\quad \begin{aligned} 3x+6y+9z&=36\\ 2x+5y+7z&=28\\ 5x+11y+16z&=64\end{aligned} \qquad d.\quad \begin{aligned} 2x-7y+z&=10\\ 3x-4y+5z&=45\\ x+3y+4z&=64\end{aligned}$$

a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14\\ 2 & 6 & 14 & 56\\ 4 & 7 & 9 & 45\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 2 & 8 & 28\\ 0 & -1 & -3 & -11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 4 & 14\\ 0 & -1 & -3 & -11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 4 & 14\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right),$$

tehát $x+2y+3z=14$, $y+4z=14$ és $z=3$, ezért $y=14-4z=14-12=2$ és $x=14-2y-3z=14-4-9=1$.

b.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -14\\ 3 & 1 & 2 & -5\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 2 & -5\\ 2 & -1 & 5 & -14\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -12\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 0 & -2 & -1 & -2\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -2 & -1 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

tehát $x + y + z = -1$, $y - z = -4$ és $z = -2$, ezért $y = -4 + z = -4 - 2 = -6$ és $x = -1 - y - z = -1 - (-6) - (-2) = 7$.

c.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 36 \\ 2 & 5 & 7 & 28 \\ 5 & 11 & 16 & 64 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 7 & 28 \\ 5 & 11 & 16 & 64 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tehát $x+2y+3z = 12$, $y+z = 4$. Mivel z oszlopában nincs vezéregyes, ezért $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, $y = 4-z = 4-t$, $x = 12 - 2y - 3z = 12 - 2(4 - t) - 3t = 4 + 2t$.

d.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -7 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & 5 & 45 \\ 1 & 3 & 4 & 64 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 64 \\ 3 & -4 & 5 & 45 \\ 2 & -7 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 64 \\ 0 & -13 & -7 & -147 \\ 0 & -13 & -7 & -118 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 64 \\ 0 & 1 & \frac{7}{13} & \frac{147}{13} \\ 0 & -13 & -7 & -118 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 64 \\ 0 & 1 & \frac{7}{13} & \frac{147}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 64 \\ 0 & 1 & \frac{7}{13} & \frac{147}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tehát $x + 3y + 4z = 64$, $y + \frac{7}{13}z = \frac{147}{13}$, $0 = 1$, ezért nincs megoldás.

3. Határozza meg, hogy milyen $a \in \mathbb{R}$ (és $b \in \mathbb{R}$) értékek esetén lesz az alábbi lineáris egyenletrendszereknek egyértelmű megoldása, végtelen sok megoldása vagy nem lesz megoldása! Ha végtelen sok megoldás van, akkor fel kell írni az összes megoldást!

$$a.\quad \begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 4x + ay &= 48 \end{aligned} \qquad b.\quad \begin{aligned} 2x + ay &= 4 \\ ax + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad c.\quad \begin{aligned} x + 5y &= 12 \\ 3x + ay &= b \end{aligned}$$

a.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 12 \\ 4 & a & 48 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 12 \\ 0 & a-8 & 0 \end{array}\right)$$

Ha $a - 8 \neq 0$, azaz $a \neq 8$, akkor egyértelmű a megoldás, $x + 2y = 12$ és $(a - 8)y = 0$, tehát $y = 0$ és $x = 12$.

Ha $a = 8$, akkor $x + 2y = 12$ és $0 = 0$, ezért $y = u$, $u \in \mathbb{R}$ és $x = 12 - 2y = 12 - 2u$.

b.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a}{2} & 2 \\ a & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a}{2} & 2 \\ 0 & 2 - \frac{a^2}{2} & 4 - 2a \end{array}\right)$$

Ha $2-\frac{a^2}{2} \neq 0$, azaz $a^2 \neq 4$, tehát $a \neq \pm 2$ akkor egyértelmű a megoldás, $x+\frac{a}{2}y = 2$ és $(2-\frac{a^2}{2})y = 4-2a$, tehát $y = \frac{4-2a}{2-\frac{a^2}{2}}$ és $x = 2 - \frac{a}{2}y = 2 - \frac{a}{2}(\frac{4-2a}{2-\frac{a^2}{2}})$.

Ha $a = 2$, akkor

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

ezért $x + y = 2$, $y = v$, $v \in \mathbb{R}$ és $x = 2 - y = 2 - v$, tehát végtelen sok megoldás van.

Ha $a = -2$, akkor

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right),$$

ezért $x + y = 2$, $0 = 8$ ezért nincs megoldás.

c.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 12 \\ 3 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 12 \\ 0 & a-15 & b-36 \end{array}\right)$$

Ha $a - 15 \neq 0$, azaz $a \neq 15$, akkor egyértelmű a megoldás, $x + 5y = 12$ és $(a - 15)y = b - 36$, tehát $y = \frac{b-36}{a-15}$ és $x = 12 - 5y = 12 - 5\frac{b-36}{a-15}$.

Ha $a = 15$ és $b - 36 \neq 0$, azaz $b \neq 36$ akkor $0 = b - 36 \neq 0$, ezért nincs megoldás.

Ha $a = 15$ és $b - 36 = 0$, azaz $b = 36$ akkor $x + 5y = 12$, theát $y = s$, $s \in \mathbb{R}$, $x = 12 - 5y = 12 - 5s$, végtelen sok megoldás van.

4. Határozza meg, hogy milyen $a \in \mathbb{R}$ (és $b \in \mathbb{R}$) értékek esetén lesz az alábbi lineáris egyenletrendszereknek egyértelmű megoldása, végtelen sok megoldása vagy nem lesz megoldása! Ha végtelen sok megoldás van, akkor fel kell írni az összes megoldást!

$$\begin{array}{rrr} a. \quad x + 2y + 3z = 6 & \quad b. \quad 2x + 5y + 2z = 3 & \quad c. \quad x + y + az = 3 \\ x - y + 2z = 2 & 2x + 4y + 6z = 12 & x + ay + z = 3 \\ 2x + y + az = b & 4x + 9y + az = b & ax + y + z = 3 \end{array}$$

a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & a-6 & b-12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -3 & a-6 & b-12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & a-5 & b-8 \end{array}\right)$$

Ha $a - 5 \neq 0$, azaz $a \neq 5$, akkor egyértelmű a megoldás, $x + 2y + 3z = 6$, $y - \frac{1}{3}z = \frac{4}{3}$ és $(a - 5)z = b - 8$, tehát $z = \frac{b-8}{a-5}$, $y = \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\frac{b-8}{a-5} + \frac{4}{3}$ és $x = 6 - 2y - 3z = 6 - 2(\frac{1}{3}\frac{b-8}{a-5} + \frac{4}{3}) - 3\frac{b-8}{a-5}$.
Ha $a - 5 = 0$, azaz $a = 5$ és $b - 8 \neq 0$, azaz $b \neq 8$, akkor $0 = b - 8 \neq 0$, ezért nincs megoldás.
Ha $a - 5 = 0$, azaz $a = 5$ és $b - 8 = 0$, azaz $b = 8$, akkor $x + 2y + 3z = 6$, $y - \frac{1}{3}z = \frac{4}{3}$. Ekkor $z = w$, $w \in \mathbb{R}$, $y = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}z = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}w$, $x = 6 - 2y - 3z = 6 - 2(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}w) - 3w = \frac{10}{3} - \frac{11}{3}w$.

b.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \\ 4 & 9 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 12 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & a-12 & b-24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & a-8 & b-15 \end{array}\right)$$

Ha $a - 8 \neq 0$, azaz $a \neq 8$, akkor egyértelmű a megoldás, $x + 2y + 3z = 5$, $y - 4z = -7$ és $(a - 8)z = b - 15$, tehát $z = \frac{b-15}{a-8}$, $y = 4z - 7 = 4\frac{b-15}{a-8} - 7$ és $x = 5 - 2y - 3z = 6 - 2(4\frac{b-15}{a-8} - 7) - 3\frac{b-15}{a-8}$.
Ha $a - 8 = 0$, azaz $a = 8$ és $b - 15 \neq 0$, azaz $b \neq 15$, akkor $0 = b - 15 \neq 0$, ezért nincs megoldás.
Ha $a - 7 = 0$, azaz $a = 7$ és $b - 15 = 0$, azaz $b = 15$, akkor $x + 2y + 3z = 5$, $y - 4z = -7$. Ekkor $z = w$, $w \in \mathbb{R}$, $y = 4z - 7 = 4w - 7$, $x = 5 - 2y - 3z = 5 - 2(4w - 7) - 3w = 9 - 11w$.

c.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3-3a \end{array}\right)$$

Ha $a - 1 \neq 0$m, azaz $a \neq 1$, akkor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3-3a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & \frac{a-1}{a-1} & \frac{1-a}{a-1} & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3-3a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3-3a \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2-(-1)(1-a) & 3-3a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 3-3a \end{array}\right)$$

Ha $2-a-a^2 \neq 0$, azaz $a \neq 1$, $a \neq -2$, akkor egyértelmű a megoldás, $x+y+az=3$, $y-z=0$, $(2-a-a^2)z = 3-3a$, ezért $z = \frac{3-3a}{2-a-a^2}$, $y = z = \frac{3-3a}{2-a-a^2}$ és $x = 3-y-az = 3 - \frac{3-3a}{2-a-a^2} - a\frac{3-3a}{2-a-a^2}$.

Ha $a=-2$, akkor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 3-3a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

tehát $0=9$, így nincs megoldás

Ha $a=1$, akkor mindhárom egyenlet $x+y+z=3$, ezért $y=u$, $z=v$, $u,v \in \mathbb{R}$ esetén $x = 3-y-z = 3-u-v$ paraméterezéseel végtelen sok megoldás van.