

7. MATEMATIKA A2 FELADATSOR

1. Határozza meg kifejtési tétellel az alábbi determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

A 2. sor szerint fejtünk ki:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -0 \cdot |\dots| + 0 \cdot |\dots| + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3(-4 - 3) = -21$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

A 3. oszlop szerint fejtjük ki:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot |\dots| = 1(12 - 2) - 3(6 - 1) = -5$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

A 2. sor szerint fejtjük ki, majd a két 3*3-as determinánst a 2. sor szerint fejtjük ki:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) - 3 \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$3(-(7 - (-3)) + 7(2 - 2)) - 3(-(-9 - 28) - 2(-6 - 14) - 7(8 - 6)) = -219$$

$$(d) \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Először a 3. oszlop szerint fejtünk ki, majd a 3*3-as determinánsokat a 2. sor szerint fejtjük ki:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$- \left(-4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) + 7 \left(-2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$-(-4(-7) - 2(-8)) + 7(-2 \cdot 7 + 3(-19)) = -541$$

2. Határozza meg, hogy milyen z érték mellett lesz invertálható az alábbi mátrix: Egy mátrix akkor invertálható, ha a determinánsa $\neq 0$.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & z \end{vmatrix}$$

$$0 \neq \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & z \end{vmatrix} = 2z - 15,$$

tehát $z \neq 7, 5$.

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & z & 5 \end{pmatrix}$$

A 3. sor szerint fejthük ki:

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & z & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3(-10) - z(-7) + 5(-13) = 7z - 105,$$

Tehát $7z - 105 \neq 0$, azaz $z \neq 15$.

3. Oldja meg a Cramer-szabállyal az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

$$(a) \begin{array}{rcl} x & + & 2y = 7 \\ 2x & + & 5y = -3 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41}{1} = 41$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-17}{1} = -17$$

$$(b) \begin{array}{rcl} x & - & 2y = -5 \\ 4x & - & 5y = -8 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{25 - 16}{-5 - (-8)} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-8 - (-20)}{-5 - (-8)} = \frac{12}{3} = 4$$

$$(c) \quad \begin{array}{rrrrr} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & + & 5y & + & 5z & = & 7 \\ 3x & + & 5y & + & 8z & = & 14 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \\ 14 & 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 14 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$(d) \quad \begin{array}{rrrrr} -2x & + & 3y & + & 4z & = & 27 \\ x & + & 4y & - & 3z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 15 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 15 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-74}{-74} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 27 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 15 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-222}{-74} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-370}{-74} = 5$$

4. Határozza meg az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ síkvektorok által meghatározott paralelogramma területét:

(a) $\underline{a} = (2, 5), \underline{b} = (4, 7)$

$$ter = \left\| \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \right\| = |14 - 20| = |-6| = 6$$

(b) $\underline{a} = (3, 2), \underline{b} = (-1, -5)$

$$ter = \left\| \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \right\| = |-15 - (-2)| = |-13| = 13$$

5. Határozza meg az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott háromszög területét:

(a) $\underline{a} = (2, -1), \underline{b} = (3, 3)$

$$ter = \frac{\left\| \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{|6 - (-3)|}{2} = \frac{9}{2}$$

(b) $\underline{a} = (5, -1), \underline{b} = (4, 2)$

$$ter = \frac{\left\| \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{|10 - (-4)|}{2} = 7$$

6. Határozza meg az u valós számot úgy, hogy a $\underline{a}$ és $\underline{b}$ síkvektorok által meghatározott paralelogramma területét 10 egység legyen:

(a) $\underline{a} = (1, 2), \underline{b} = (2, u)$

$$10 = \frac{\left\| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & u \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{|u - 4|}{2} \Rightarrow |u - 4| = 20 \Rightarrow u - 4 = \pm 20 \Rightarrow u_1 = 24, u_2 = -16$$

(b) $\underline{a} = (-1, 2), \underline{b} = (u, 9)$

$$10 = \frac{\left\| \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ u & 9 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{|-9 - 2u|}{2} \Rightarrow |-9 - 2u| = 20 \Rightarrow -9 - 2u = \pm 20 \Rightarrow u_1 = -14,5, u_2 = 5,5$$

7. Határozza meg az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ térvektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát:

(a) $\underline{a} = (1, 2, 3), \underline{b} = (6, 4, 7), \underline{c} = (-2, 0, 3)$

$$\left\| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right\| = |-28| = 28$$

(b) $\underline{a} = (3, 9, 1), \underline{b} = (1, -2, -5), \underline{c} = (4, 4, 1)$

$$\left\| \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right\| = |-123| = 123$$

8. Határozza meg az v valós számot úgy, hogy a $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ térvektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata 12 egység legyen:

(a) $\underline{a} = (1, 2, 3), \underline{b} = (2, 3, -1), \underline{c} = (-1, -3, v)$

$$12 = \left\| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & v \end{vmatrix} \right\| = |-v - 10| \Rightarrow |-v - 10| = 12 \Rightarrow -v - 10 = \pm 12 \Rightarrow v_1 = -2, v_2 = -22$$

$$(b) \quad \underline{a} = (-2, 3, 5), \underline{b} = (1, v, 9), \underline{c} = (0, 3, 2)$$

$$12 = \left| \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & v & 9 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = |63 - 4v| \Rightarrow |63 - 4v| = 12 \Rightarrow 63 - 4v = \pm 12 \Rightarrow v_1 = \frac{51}{4}, v_2 = \frac{75}{4}$$