

8. MATEMATIKA A2 FELADATSOR - MEGOLDÁSOK

1. $\mathbb{R}^3$ -ben alteret alkot-e az alábbi halmaz:

(a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Az $\mathbb{R}^3$ -ben a W részhalmaz pontosan akkor alkot alteret, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in W$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in W$ és $\alpha \underline{u} \in W$.

Ha $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ és $\alpha \underline{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in$

W , ezért W alteret alkot.

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Ha $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, akkor $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W$, ezért W nem alkot alteret.

(c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a + b + c = 0 \right\}$

Ha $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \in W$, ahol

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) = (u_1 + u_2 + u_3) + (v_1 + v_2 + v_3) = 0$$

és $\alpha \underline{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix} \in W$, ahol

$$\alpha u_1 + \alpha u_2 + \alpha u_3 = \alpha(u_1 + u_2 + u_3) = 0,$$

ezért W alteret alkot.

(d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \text{ egészek} \right\}$

Ha $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \in W$, ahol $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$ és $u_3 + v_3$ egészek, így $\underline{u} + \underline{v} \in W$. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha \underline{u}$ nem biztos, hogy W -ben lesz, pl.

ha $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 0,5$, akkor $\alpha \underline{u} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \notin W$, azért nem alkot alteret W .

(e) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \text{ között van nemnegatív és nempozitív is} \right\}$

Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \in W$ esetén $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \notin W$, ezért nem alkot W alteret.

2. $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben alteret alkot-e az alábbi halmaz:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \geq 0 \right\}$

Az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben a W részhalmaz pontosan akkor alkot alteret, ha minden $\underline{A}, \underline{B} \in W$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\underline{A} + \underline{B} \in W$ és $\alpha \underline{A} \in W$.

Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, ahol $a_{11} \geq 0, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \geq 0$ és $b_{11} \geq 0, b_{12} \geq 0, b_{21} \geq 0, b_{22} \geq 0$. Ekkor

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$

ahol $a_{11} + b_{11} \geq 0, a_{12} + b_{12} \geq 0, a_{21} + b_{21} \geq 0$ és $a_{22} + b_{22} \geq 0$, tehát $\underline{A} + \underline{B} \in W$.

Most

$$\alpha \underline{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

Ha pl $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\alpha = -1$, akkor $\alpha \underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \notin W$, ezért W nem alkot alteret. ezért W alteret alkot.

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + b + c + d = 0 \right\}$

Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, ahol $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$ és $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = 0$. Ekkor

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$

ahol

$$(a_{11} + b_{11}) + (a_{12} + b_{12}) + (a_{21} + b_{21}) + (a_{22} + b_{22}) = (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) + (b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) = 0,$$

így $\underline{A} + \underline{B} \in W$. Most

$$\alpha \underline{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\alpha a_{11} + \alpha a_{12} + \alpha a_{21} + \alpha a_{22} = \alpha(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) = 0,$$

tehát $\alpha \underline{A} \in W$, ezért W alteret alkot.

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$. Ekkor

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in W.$$

Továbbá

$$\alpha \underline{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & 0 \\ 0 & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \in W,$$

ezért W alteret alkot.

3. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k$ vektorok? Ha igen, akkor írja fel ebben a bázisban a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektor koordinátáit!

(a) $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mivel $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$, ezért bázist alkot. Ebben a B bázisban a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ koordinátái

$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ha $\underline{v} = x\underline{u}_1 + y\underline{u}_2$, azaz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + y \\ 5x + y \end{pmatrix}$$

tehát a

$$4x + y = 1$$

$$5x + y = 2$$

egyenletrendszert kell megoldani, aminek megoldása az $x = 1$ és $y = -3$, ezért $(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Mivel $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, ezért nem alkot bázist.

(c) $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Mivel $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16 \neq 0$, ezért bázist alkot. Ebben a B bázisban a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

koordinátái $(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ha $\underline{v} = x\underline{u}_1 + y\underline{u}_2$, azaz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$$

tehát a

$$-3x + 2y = 1$$

$$2x + 4y = 2$$

egyenletrendszert kell megoldani, aminek megoldása az $x = 0$ és $y = 0,5$, ezért $(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

(d) $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2$ -ben csak két vektor alkothat bázist, ezért ez nem bázis.

4. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ben az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k$ vektorok? Ha igen, akkor írja fel ebben a bázisban a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor koordinátáit!

$$(a) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mivel $\mathbb{R}^3$ -ben csak 3 vektor alkothat bázist, ezért ez nem bázis.

$$(b) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mivel $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, ezért nem alkot bázist.

$$(c) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mivel $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5$, ezért bázist alkot. Ebben a B bázisban a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ koordinátái $(\underline{v})_B =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ha $\underline{v} = x\underline{u}_1 + y\underline{u}_2 + z\underline{u}_3$, azaz

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 5y + 7z \\ 3x + 5y + 6z \\ 2x + 4y + 5z \end{pmatrix}$$

tehát a

$$5x + 5y + 7z = 3$$

$$3x + 5y + 6z = 2$$

$$2x + 4y + 5z = 1$$

egyenletrendszert kell megoldani, aminek megoldása az $x = 1$, $y = 1$ és $z = -1$ ezért $(\underline{v})_B =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mivel $\mathbb{R}^3$ -ben csak 3 vektor alkothat bázist, ezért ez nem bázis.

5. Milyen z esetén alkotnak bázist az alábbi vektorok?

$$(a) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix} = -z - 135 \neq 0$, azaz $z \neq -135$.

$$(b) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3z + 15 \neq 0, \text{ azaz } z \neq -5.$$

$$(c) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} z \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & z \\ 1 & 2 & -11 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 24, \text{ azaz minden } z \in \mathbb{R} \text{ esetén bázist alkotnak.}$$

6. Lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^3$ -ben az alábbi vektorok?

$$(a) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k = \underline{0}$ csak úgy teljesül, ha $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$. Mivel most

$$1\underline{u}_1 + (-2)\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ezért nem lineárisan függetlenek.

$$(b) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ha

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

akkor

$$5\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

aminek $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 0$ a megoldása, emiatt lineárisan függetlenek.

$$(c) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^m$ -ben m darab vektor pontosan akkor lesz lineárisan független, ha a belőlük formált determináns $\neq 0$. Most

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

ezért nem lineárisan függetlenek.

$$(d) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

ezért lineárisan függetlenek.

$$(e) \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^m$ -ben m -nél több vektor nem lehet lineárisan független, ezért ez a négy vektor $\mathbb{R}^3$ -ben nem lineárisan független.

7. Lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben az alábbi mátrixok?

$$(a) \underline{\underline{M}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Az $\underline{\underline{M}}_1, \underline{\underline{M}}_2, \dots, \underline{\underline{M}}_k$ mátrixok lineárisan függetlenek, ha $\lambda_1 \underline{\underline{M}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{M}}_2 + \dots + \lambda_k \underline{\underline{M}}_k = \underline{\underline{0}}$ csak úgy teljesül, ha $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$. Most

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 & \lambda_1 + 4\lambda_2 + 16\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ezért

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 16\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

ami $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ -t ad, ezért lineárisan függetlenek.

$$(b) \underline{\underline{M}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Most

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 & 2\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 9\lambda_3 & -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tehát

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 9\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek megoldása a Gauss-eliminációval

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -9 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

, ezért $\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, így λ_3 -at tetszőlegesen választhatjuk, emiatt nem lesznek lineárisan függetlenek.

$$(c) \underline{\underline{M}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{M}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Most

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 \\ 3\lambda_3 + 3\lambda_4 & 4\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ezért

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

$$3\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$$

$$4\lambda_4 = 0$$

Innen azt kapjuk, hogy $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_1 = 0$, tehát lineárisan függetlenek.

$$(d) \underline{\underline{M}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{M}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{M}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underline{\underline{M}}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$ egy 4 dimenziós vektortér, ezért 4-nél több vektor (most valójában mátrix) nem lehet lineárisan független, így ezek a mátrixok nem lineárisan függetlenek.

8. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját

$$(a) \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tehát a rang 3.

$$(b) \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tehát a rang 2.

$$(c) \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tehát a rang 3.