

11.1 • Jelölje D az origó középpontú egységkör lap és a $(2, 2)$ középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör lap unióját. Legyen (X, Y) a D -ben egyenletes eloszlás szerint választott véletlen pont koordinátapárja. Határozzuk meg X és Y várható értékét és szórását.

11.2 Dobok egy dobókockával. Ha az eredmény i , akkor folytonos egyenletes eloszlás szerint választok egy számot a $(0, i)$ intervallumon. Mi lesz a kapott szám várható értéke és szórása?

11.3 A LEFULLAD akkumulátorok élettartama exponenciális eloszlású 9 hónap várható értékkel. Ha az autóban egy LEFULLAD akkumulátor tönkremegy, azonnal kicserélem egy ugyanilyen típusú új akkumulátorra. Vettem egy autót benne egy vadonatúj LEFULLAD akkumulátorral. Ezt az autót T ideig fogom használni, ahol T egyenletes eloszlású a $[0, 9]$ év intervallumon. Jelölje Y , hogy hányszor cserélek akkumulátort ezalatt az idő alatt az autóban. $\mathbb{E}Y = ?$ $\mathbb{D}^2Y = ?$

11.4 (a) • Legyen X és Y a két koordinátája annak a pontnak, melyet az origó középpontú, 1 sugarú körlapon egyenletesen választottunk. (Azaz: a közös sűrűségfüggvény $f(x, y) = 1/\pi$, ha $x^2 + y^2 \leq 1$.) Határozzuk meg az $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ és a $\Theta = \arctg Y/X$ valószínűségi változók közös sűrűségfüggvényét.

(b) Legyen U_1, U_2 két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ -en. Bizonyítsuk be, hogy ha $X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$ és $Y = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$, akkor az (X, Y) pár kétdimenziós normális eloszlású.

11.5 a) Legyenek $X \sim E(0, 1)$, és $Y \sim \text{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását.

b) Legyenek $X \sim E(0, 1)$, és $Y \sim \text{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását.

c) Legyenek $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, és $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását, és a $\mathbf{P}\{X < Y\}$ valószínűséget.

d) • Legyen X és Y két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy az $U := X + Y$ és $V := X/(X + Y)$ valószínűségi változók függetlenek.

11.6 Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye legyen $h(x, y) = f(x)f(y)$ alakú, ahol $f(x)$ egydimenziós sűrűségfüggvény. Legyen $U = \max\{X, Y\}$ és $V = \min\{X, Y\}$. Határozzuk meg U és V együttes eloszlásfüggvényét és ennek sűrűségfüggvényét.

11.7 Legyen $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő változókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \quad \xi_i := X_i/\varrho, \quad i = 1, 2, 3.$$

a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\underline{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.

Bónusz Legyen X és Y két független standard normális eloszlású valószínűségi változó.

a) Tekintsük az (X, Y) véletlen pontot a síkon, és tekintsük az (U, V) transzformált valószínűségi változókat, ahol $U = X^2 + Y^2$ és $V = Y/X$. Bizonyítsuk be, hogy U eloszlása exponenciális, V eloszlása pedig standard Cauchy, és a két valószínűségi változó független.

b) Számítsuk ki a $\mathbb{E}(X^2/U^2)$ és a

$$\mathbb{E} \left(\frac{\min(|X|, |Y|)}{\max(|X|, |Y|)} \right)$$

várható értékeket.

11.8 Legyenek X és Y függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[-1, 1]$ intervallumon. Legyenek $U_\theta = \cos(\theta) \cdot X + \sin(\theta) \cdot Y$ és $V_\theta = -\sin(\theta) \cdot X + \cos(\theta) \cdot Y$.

(a) Határozza meg X és Y kovarianciamátrixát!

(b) A θ paraméter mely értékei esetén lesznek U_θ és V_θ korellálatlanok?

(c) A θ paraméter mely értékei esetén lesznek U_θ és V_θ függetlenek?

11.9 Határozzuk meg X és Y kovarianciamátrixát, ahol X egy $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó és $Y = 2X + 1$.

11.10 Legyenek X és Y független $\mathcal{N}(0, 1)$ illetve $\mathcal{N}(0, 9)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az \mathbb{R}^2 síkon, melynek koordinátái $(X; Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

a) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$,

b) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 2\}$,

c) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$,

d) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x, |y| \leq 1, x \geq -3\}$,

e) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/9) \leq 1\}$,

f) • $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/9) \leq c^2\}$.

11.11 Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont beleesik az

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$ körgyűrűbe;
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \min(|x|, |y|) \leq \max(|x|, |y|) \leq 3\}$ tartományba;
- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq |x| + |y| \leq 4\}$ tartományba.

11.12 Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont a $(0, 3)$, $(4, 0)$, $(1.8, 5.4)$, $(5.8, 2.4)$ csúcsú téglalapba esik.

11.13 Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont beleesik abba a szabályos háromszögbe, melynek egyik oldala a $[-1, 1]$ intervallum az x tengelyen, harmadik csúcspontja pedig a $(0, \sqrt{3})$ koordinátájú pont.

11.14 Egy részecske tömegét két kutatócsoport is szeretné kimérni, az első csoport k mérést végez és átlagolja ezek eredményét, a második csoport ℓ mérést végez és szintén átlagol. Az egyes mérések független azonos normális eloszlásúak, a várható érték a részecske tényleges μ tömege, a szórás σ . Mi a valószínűsége, hogy az első csoport eredménye pontosabb, mint a második csoport eredménye?

11.15 •• Legyenek X_1, \dots, X_n, X_{n+1} független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és $Y = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

- (a) Határozzuk meg az (X_1, Y) valószínűségi változók kovarianciamátrixát.
- (b) $\mathbb{P}(|Y| \leq |X_{n+1}|) = ?$

11.16 Legyenek X és Y független és azonos $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a

$$Z := e^{(X^2 + Y^2)/2} (1 + X^2 + Y^2)^{-3/2}$$

valószínűségi változó várható értékét és szórását.

11.17 Legyen X standard normális valószínűségi változó. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(\cosh(X), \sinh(X))$ értékét.

11.18 Legyen $X \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó és $Y := \text{sign}(1 - |X|) \cdot X$.

- (a) Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlását.
- (b) $Z := X + Y$ eloszlása normális-e?

11.19 •• Legyen X standard normális eloszlású, és I X -től független, $\mathbf{P}\{I = 1\} = \mathbf{P}\{I = 0\} = 1/2$ eloszlással. Definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$Y := \begin{cases} X, & \text{ha } I = 1, \\ -X, & \text{ha } I = 0. \end{cases}$$

Azaz: Y (X -től függetlenül) egyenlő eséllyel lesz X vagy $-X$.

- a) Mutassuk meg, hogy Y standard normális eloszlású.
- b) Független-e I és Y ?
- c) Független-e X és Y ?
- d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

11.20 Az $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó legyen kétdimenziós normális eloszlású $\underline{m} = (-1, 1)$ várhatóérték-vektorral és $\underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{X \geq -1, Y \geq 1\}$ valószínűséget! (Tipp: $\underline{C} = \underline{B}^2$, ahol $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.)

11.22 Egy négyzetrácsos papírra egy tintapaca csöppen. Mekkora a valószínűsége, hogy a paca nem metszi a vonalakat, ha azok fél centire vannak egymástól, a tintafolt sugara pedig egyenletes eloszlású a $[0 \text{ cm}, 1/3 \text{ cm}]$ intervallumon?

11.24 Legyen $Y \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, és $X | Y \sim \mathcal{N}(Y, 1)$.

- a) Mutassuk meg, hogy az (X, Y) pár együttes eloszlása ugyanaz, mint az $(Y + Z, Y)$ páré, ahol Z egy Y -től független standard normális valószínűségi változó.
- b) Ennek segítségével mutassuk meg, hogy az X, Y pár kétdimenziós normális eloszlású.
- c) Számítsuk ki az $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}^2 X$, $\mathbf{Corr}(X, Y)$ mennyiségeket.
- d) Határozzuk meg $\mathbf{E}(Y | X = x)$ értékét.
- e) Mi Y feltételes eloszlása az $X = x$ feltétel mellett?