$\boxed{6.4\ a)}$ HA $A<0$, AKKOR BAJ VAN:

$$F\left(-\frac{1}{B}\right) = \exp(-A\cdot e) > e^0 = 1 \ \lightning$$

HA $A=0$, AKKOR BAJ VAN: $F(x) \equiv 1$, ÉS

AKKOR NEM TELJESÜL $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

TEHÁT $\boxed{A>0}$.

HA $B<0$, AKKOR BAJ VAN: F CSÖKKENŐ

FÜGGVÉNY, PEDIG NEMCSÖKKENŐ KÉNE, H. LEGYEN.

HA $B=0$, AKKOR $F(x) \equiv e^{-A}$, BAJ, HISZ

$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ KELLENE.

VISZONT HA $A>0$, $B>0$, AKKOR OK:

KÉT CSÖKKENŐ FV. KOMPOZÍCIÓJA NÖVEKVŐ,

BALRÓL FOLYTONOS ✓

TOVÁBBÁ:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = e^{-A\cdot e^{-B\cdot\infty}} = e^{-A\cdot 0} = 1 \ \checkmark$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = e^{-A\cdot e^{B\cdot\infty}} = e^{-A\cdot\infty} = 0 \ \checkmark$$

<u>GUMBEL</u>-<u>ELOSZLÁS</u> A NEVE.

(SOK FÜGGETLEN, AZONOS ELOSZLÁSÚ VAL. VÁLTOZÓ <u>MAXIMUMA</u> KÖZELÍTHETŐ JÓL VELE)

$\boxed{6.5\ c)}$ $f \geq 0$ ✓

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} C\cdot x^{-5}\,dx = C\cdot\int_1^{\infty} x^{-5}\,dx =$$

TEHÁT $\boxed{C=4}$

$$= C\cdot\left[-\frac{1}{4}\cdot x^{-4}\right]_1^{\infty} = C\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\infty^{-4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 1^{-4}\right) = C\cdot\frac{1}{4} = 1$$

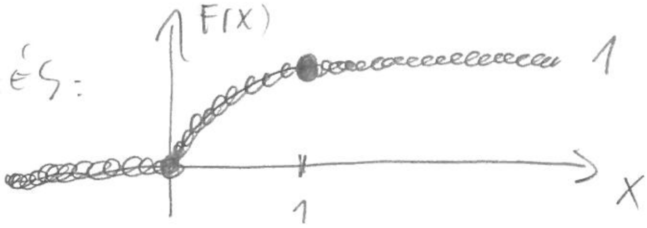
$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \frac{4}{3}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 2\right) = \mathbb{P}(1\leq X\leq 2) = \int_1^2 4\cdot x^{-5}\,dx = \left[-x^{4}\right]_1^2 = 1-2^{-4}$$

$\boxed{6.6}$
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{HA } x<0 \\ 1, & \text{HA } x>1 \\ \int_0^x f(s)\,ds, & \text{HA } 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^x 5\cdot(1-s)^4\,ds = \left[-(1-s)^5\right]_0^x = 1-(1-x)^5,\quad 0\leq x\leq 1$$

ELLENŐRZÉS:



$F(0)=0$ ✓

$F(1)=1$ ✓

ÍGY KELL KINÉZNIE.

KELL: AZ AZ x, HOGY $\boxed{F(x)=0.99}$

AZAZ: $(1-x)^5 = 0.01$, AZAZ $1-x\approx 0.4$, $\boxed{x\approx 0.6}$

TEHÁT KB. 600 LITERES BENZINTARTÁLY KELL.

ELADÁS: $X\cdot 1000$ LITER BENZIN, AHOL

$\mathbb{P}(X\leq x) = F(x)$. KELL x: $\mathbb{P}(X\geq x) = 0.01$

$$\mathbb{P}(X\geq x) = 1-\mathbb{P}(X<x) \overset{\text{FOLYTONOS } F}{=} 1-F(x) \overset{\text{KELL}}{=} 0.01$$

$\boxed{2.\ \text{OLDAL}}$

$\boxed{6.10}$ $\xi \sim UNI[0,1]$

A HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉGNEK KELL TELJESÜLNIE: $\xi + (1-\xi) \geq 1/2$ ✓

$\xi + \frac{1}{2} \geq 1 - \xi \iff \xi \geq \frac{1}{4}$ KELL

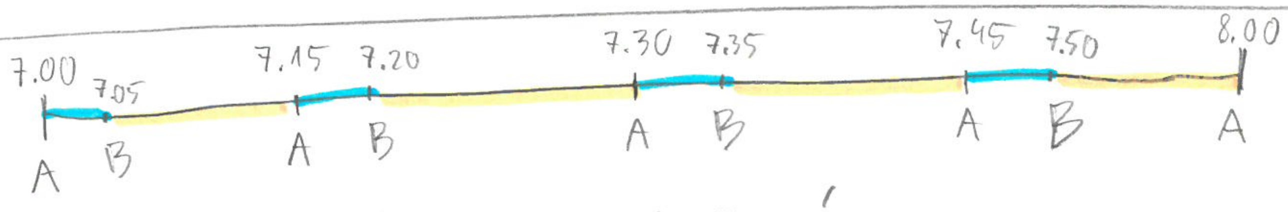
$1 - \xi + \frac{1}{2} \geq \xi \iff \xi \leq 3/4$ KELL

TEHÁT $\mathbb{P}$(HÁROMSZÖGET ALKOT) =

$$= \mathbb{P}\left(1/4 \leq \xi \leq \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(1/4\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

HISZ $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{HA } x \leq 0 \\ x, & \text{HA } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{HA } x \geq 1 \end{cases}$

$\boxed{6.13}$

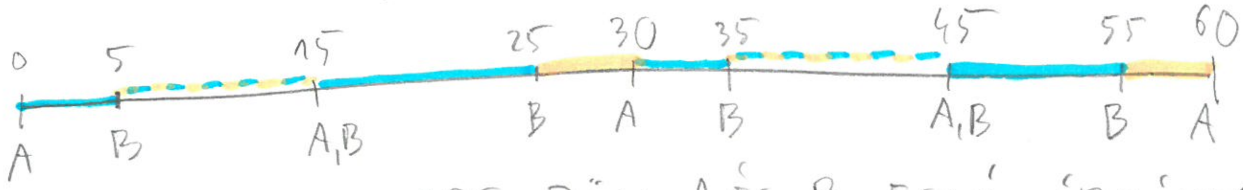


a) KÉK: B FELÉ, NARANCS: A FELÉ

EGYENLETES ELOSZLÁS: $\mathbb{P}(\text{B FELÉ}) = \dfrac{\text{KÉK ÖSSZ-HOSSZ}}{\text{KÉK + NARANCS ÖSSZ-HOSSZ}}$

$\mathbb{P}(\text{B FELÉ}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(\text{A FELÉ}) = \frac{2}{3}$

b) $\mathbb{P}(\text{B FELÉ}) = \frac{1}{3}$ (HASONLÓAN AZ a) RÉSZHEZ)

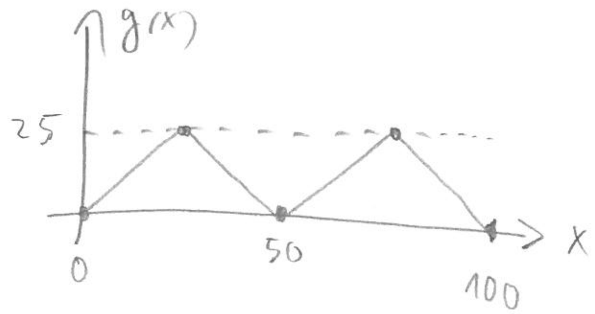
c) 

c) & a): HA EGYSZERRE JÖN A ÉS B FELÉ: ÉRMÉVEL DÖNTÖK

$$\mathbb{P}(\text{B FELÉ}) = \frac{5 + \frac{10}{2} + 10 + 0 + 5 + \frac{10}{2} + 10 + 0}{60} = \frac{2}{3}$$

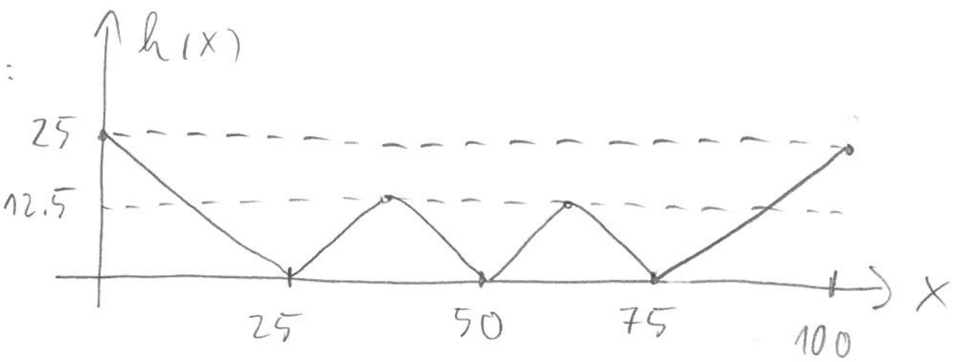
$\boxed{6.14}$ $0 \leq X \leq 100$: LEGYEN $g(X)$ A TÁVOLSÁG A LEGKÖZELEBBI SZERVÍZIG ABBAN AZ ESETBEN, 0-BAN, 50-BEN ÉS 100-BAN VAN SZERV.

EKKOR:



HA VISZONT: 25-NÉL, 50-NÉL ÉS 75-NÉL VAN: $h(x)$

EKKOR:



HA $X \sim UNI[0, 100]$ (X A BUSZ LEROBBANÁSÁNAK HELYE)

SŰ.FV.

$$\mathbb{E}(g(X)) = \text{VÁRHATÓ TÁV} = \int_0^{100} g(x) \cdot f(x)\,dx =$$

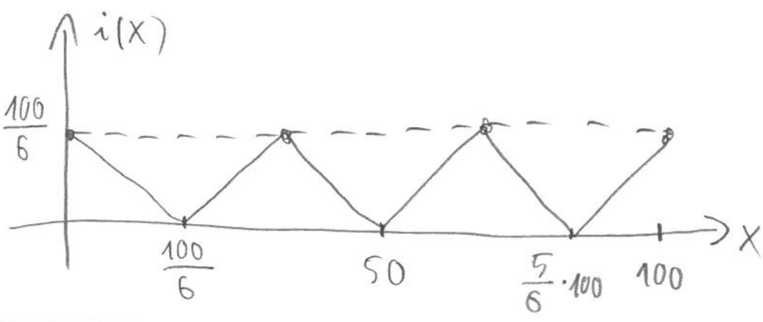
$\boxed{\text{LAW OF THE UNCONSCIOUS STATISTICIAN}}$

$$= \int_0^{100} g(x) \cdot \frac{1}{100}\,dx = \frac{1}{100} \cdot 2 \cdot \frac{50 \cdot 25}{2} = 12.5$$

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_0^{100} h(x) \cdot \frac{1}{100}\,dx = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{25^2}{2} + 2 \cdot \frac{25 \cdot 12.5}{2} + \frac{25^2}{2} \right) = 9.375$$

TEHÁT h JOBB (HA A VÁRHATÓ TÁVOT HASONLÍTJUK)

MÉG JOBB, HA:



HISZEN...

$\boxed{\text{4. OLDAL}}$

HISZEN $\mathbb{E}(i(X_1)) = \frac{1}{100} \cdot \int_0^{100} i(x)\,dx = \frac{100}{12} = 8.333$

ÉS i A <u>LEGJOBB</u>, UGYANIS HA BÁRMILYEN MÁS MÓDON TESZÜNK LE HÁROM SZERVIZT A $[0,100]$ INTERVALLUMRA ÉS $j: [0,100] \to \mathbb{R}_+$ JELÖLI A LEGKÖZELEBBI SZERVIZ TÁVOLSÁGÁT, ✪

AKKOR $\forall r \geq 0$ ESETÉN: $\boxed{\mathbb{P}(i(X_1) \geq r) \leq \mathbb{P}(j(X_1) \geq r)}$

TELJESÜL ÉS EMIATT

$$\mathbb{E}(i(X_1)) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(i(X_1) \geq r)\,dr \leq \int_0^{\infty} \mathbb{P}(j(X_1) \geq r)\,dr = \mathbb{E}(j(X_1))$$

$\boxed{4.10}$-ES FELADAT ÁLTALÁNOSÍTÁSA

✪ BIZONYÍTÁSA: <u>KELL</u>: $\forall r \geq 0$: $\mathbb{P}(i(X_1) \leq r) \geq \mathbb{P}(j(X_1) \leq r)$

LEGYEN $x_1 = \frac{100}{6}$, $x_2 = 50$, $x_3 = \frac{5}{6} \cdot 100$

LEGYEN $I(x, r) = [x - r, x + r] \cap [0, 100]$

<u>KELL</u>: $\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \in [0, 100]$ ESETÉN: $\forall r \geq 0$

$$\text{HOSSZ}\left(\bigcup_{i=1}^{3} I(x_i, r)\right) \geq \text{HOSSZ}\left(\bigcup_{i=1}^{3} I(\tilde{x}_i, r)\right)$$

ÉS VALÓBAN: HA $0 \leq r \leq \frac{100}{6}$, AKKOR

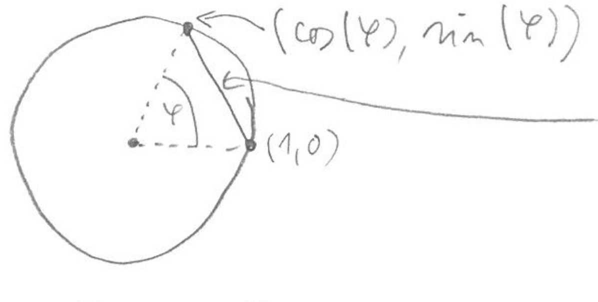
$$\text{HOSSZ}\left(\bigcup_{i=1}^{3} I(\tilde{x}_i, r)\right) \leq \sum_{i=1}^{3} \text{HOSSZ}(I(\tilde{x}_i, r)) \leq 6 \cdot r = \text{HOSSZ}\left(\bigcup_{i=1}^{3} I(x_i, r)\right)$$

HA $r \geq \frac{100}{6}$, AKKOR

$$\text{HOSSZ}\left(\bigcup_{i=1}^{3} I(\tilde{x}_i, r)\right) \leq 100 = \text{HOSSZ}\left(\bigcup_{i=1}^{3} I(x_i, r)\right)$$

$\boxed{6.19}$ FORGÁS-SZIMMETRIA MIATT FELTEHETJÜK, HOGY AZ EGYIK PONT SZÖGE 0. JELÖLJE A MÁSIK SZÖGET $\varphi \sim UNI[-\pi, \pi]$

TÁVOLSÁGUK:



$$D^2 = (\cos(\varphi) - 1)^2 + \sin^2(\varphi) =$$
$$= \cos^2(\varphi) - 2\cos(\varphi) + 1 + \sin^2(\varphi) =$$
$$= 2 \cdot (1 - \cos(\varphi))$$

LÉVÉN, HOGY $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$, FELTEHETJÜK, HOGY $\varphi \sim UNI[0, \pi]$

TUDJUK, HOGY $\mathbb{P}(0 \leq D \leq 2) = 1$.

HA $d \in [0,2]$, AKKOR $F(d) = \mathbb{P}(D \leq d) =$

$$= \mathbb{P}(D^2 \leq d^2) = \mathbb{P}(2 \cdot (1 - \cos(\varphi)) \leq d^2) =$$

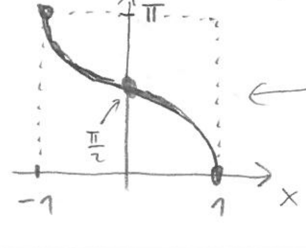
$$= \mathbb{P}\left(1 - \cos(\varphi) \leq \frac{1}{2} d^2\right) = \mathbb{P}\left(1 - \frac{1}{2} d^2 \leq \cos(\varphi)\right) =$$

$$\boxed{1 - \frac{1}{2} d^2 \in [-1, 1]}$$

$$\mathbb{P}\left(\arccos\left(1 - \frac{1}{2} d^2\right) \geq \varphi\right) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{d^2}{2}\right)$$

$(0 \leq d \leq 2)$

MEGJ.:



$\boxed{x \longmapsto \arccos(x)}$

$\boxed{6.20}$ r SUGARÚ GÖMB TÉRFOGATA: $\frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$

$\mathbb{P}(0 \le \xi \le 1) = 1$, ÉS HA $0 \le r \le 1$, AKKOR

$$\mathbb{P}(\xi \le r) = \frac{4/3\, r^3 \cdot \pi}{4/3\, 1^3 \cdot \pi} = r^3 = F(r), \quad 0 \le r \le 1$$

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \ge r)\, dr = \int_0^1 (1 - r^3)\, dr = \frac{3}{4}$$