

Valószínűségszámítás vizsga, 2022. jan. 4.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%-os eredménynek számít.

Elm. 1. Legyenek az alábbi események ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezve.

- (a) (5 pont) Definiálja, hogy mikor teljesen függetlenek az A_1, A_2, A_3, A_4 események.
- (b) (5 pont) Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Definiálja a $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget és lássa be, hogy A és B akkor és csak akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
- (c) (5 pont) Mutasson olyan A, B, C eseményeket, amelyek páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek. Válaszát indokolja.

Elm. 2. Legyen X standard normális eloszlású. Ekkor X sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

- (a) (10 pont) Számítsa ki minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{E}(e^{tX})$ értékét.
- (b) (5 pont) Számítsa ki $\mathbb{E}(X)$ és $\text{Var}(X)$ értékét. *Súgás:* használhatja az (a) részfeladat eredményét!

Elm. 3. Jelölje $f(x, y)$ az (X, Y) valószínűségi változó-pár együttes sűrűségfüggvényét.

- (a) (3 pont) Definiálja képlettel az $\mathbb{E}(Y | X = x_0)$ és az $\mathbb{E}(Y | X)$ feltételes várható értéket és mondja ki a feltételes várható érték toronyszabályát.
- (b) (7 pont) Mondja ki és bizonyítsa a feltételes szórásnégyzet formulát.
- (c) (10 pont) Egy egységnyi hosszú ropit egy egyenletesen választott X pontban kettétörök. A $[0, X]$ rész-ropin választok egyenletes eloszlással egy Y pontot. Számolja ki Y szórásnégyzetét integrálás nélkül. *Emlékeztető:* ha $Z \sim \text{UNI}[a, b]$, akkor $\mathbb{E}(Z) = \frac{a+b}{2}$ és $\text{Var}(Z) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Gyak. 1. A sarki kürtőskalácsos kétféle kürtőskalácsot árul: vaníliásat és diósat. A vevők homogén Poisson pontfolyamat szerint érkeznek, átlagosan két percenként jön új vevő. Minden vevő a többitől függetlenül $1/3$ valószínűséggel kér vaníliásat, $2/3$ valószínűséggel diósat.

- (a) (7 pont) Jelölje T azt az időt, ami nyitástól kezdve az első diós kürtőskalács eladásáig eltelik. Írja fel T eloszlásfüggvényét. (Időegység: perc)
- (b) (13 pont) Közelítőleg számítsa ki annak a valószínűségét, hogy reggel 8-tól délután 6-ig 290-nél több kürtőskalácsot adnak el. (Eloszlástáblázat a túloldalon)

Bónusz: (10 pont) Közelítőleg számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a reggel 8 és délután 6 közt eladott kürtőskalácsok harmadánál legalább 5-el több volt közülük a vaníliás.

Gyak. 2. (15 pont) Egy internetes közösségi száj felhasználói körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám, vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg. Mi a valószínűsége, hogy Ádám köre 1, 2, 3 illetve 4 főből áll akkor, amikor 5 fő a közösség?

Gyak. 3. (15 pont) Legyen N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{P}(N > i) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)).$$

