NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2022. jan. 24.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható.
Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(5 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a Markov-egyenlőtlenséget!

(b) *(5 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a Csebisev-egyenlőtlenséget!

(c) *(5 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a nagy számok gyenge törvényét (véges második momentum feltételezésével)!

Instrukció: Az (a), (b), (c) bizonyítások lépéseinél írja oda, hogy a melyik feltételt hol használta.

Elm. 2. Legyenek X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

(a) *(3 pont)* Írja fel (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét.

(b) *(7 pont)* Legyen $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$. Számolja ki R eloszlásfüggvényét. *Súgás:* Polárkoordináták!

(c) *(10 pont)* Egy szabályos érmét dobálok. Jelölje S_n a fejek számát az első n dobás során. Adjon közelítést az $\{S_{1000} - 500 > 0\} \cap \{S_{2000} - 1000 > 0\}$ esemény valószínűségére!
Súgás: Milyen eloszlású S_{1000}? Milyen eloszlású $S_{2000} - S_{1000}$? Függetlenek-e S_{1000} és S_{2000}?

Elm. 3. (a) *(3 pont)* Definiálja a p paraméterű geometriai eloszlást! *Instrukció:* képlettel is, szemléletesen is!

(b) *(7 pont)* Számolja ki a p pareméterű geometriai eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét!

(c) *(5 pont)* Definiálja az $r \in \mathbb{N}_+$ és $p \in [0, 1]$ paraméterű negatív binomiális eloszlást a szemléletes jelentése alapján, írja fel az eloszlás súlyfüggvényének képletét és magyarázza el, hogy hogyan jön ki a szemléletes jelentésből a súlyfüggvény képlete.

Gyak. 1. Mogyorós-mazsolás kalácsot sütök. Egy kg kalács-tésztában várhatóan 20 mazsola van. 10 dkg kalács-tésztában $3/4$ valószínűséggel találok legalább egy mogyorót. A kalács tömege egyenletes eloszlású a $[0.8, 1.2]$ intervallumon (kg-ban mérve). Számítsa ki a kalácsban levő mogyorók számának várható értékét *(5 pont)* és szórásnégyzetét *(10 pont)*.

Bónusz: *(10 pont)* Számítsa ki a kalácsban levő mogyorók és mazsolák számának kovarianciáját!

Segítség: Ha $Z \sim \mathrm{UNI}[a, b]$, akkor $\mathbb{E}(Z) = \frac{a+b}{2}$ és $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Gyak. 2. Van egy 5 cm hosszú ropim, amit egy egyenletesen választott pontban eltörök. A bal kezemben levő ropi hosszát jelölje X. Ezután fogom a bal kezemben levő ropit és egy egyenletesen választott pontban eltöröm: jelölje Y a második törés után a bal kezemben levő ropi hosszát.

(a) *(5 pont)* Írja fel X sűrűségfüggvényét (amit jelöljön $f_X(x)$-el), Y feltételes sűrűségfüggvényét az $X = x$ feltétel mellett (ezt jelölje $f_{Y|X}(y|x)$-el), valamint X és Y együttes sűrűségfüggvényét (ezt jelölje $f(x, y)$). *Instrukció:* Ügyeljen a tartományokra!

(b) *(7 pont)* Számolja ki X feltételes sűrűségfüggvényét az $Y = y$ feltétel mellett.

(c) Számolja ki $\mathbb{E}(Y|X = x)$ értékét *(3 pont)* és $\mathbb{E}(X|Y = y)$ értékét *(5 pont)*.

Gyak. 3. n férfit és m nőt rangsorolnak egy vizsgán. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma pontszám, és az összes lehetséges sorrend egyformán valószínű. Legyen X a legjobb nő helyezése (például $X = 1$ azt jelenti, hogy a legjobb vizsgázó egy nő). Határozzuk meg X eloszlását *(10 pont)* és várható értékét *(5 pont)*. *Súgás:* Igen, a várható érték zárt alakra hozható.

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000