NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2023. dec. 19.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(2+4 pont)* Definiálja a variancia (azaz a szórásnégyzet) fogalmát és bizonyítsa be a $\mathrm{Var}(aX+b)$ értékére vonatkozó formulát (ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és X egy valószínűségi változó).

(b) *(2+4 pont)* Fogalmazzon meg szükséges és elégséges feltételt a kovariancia fogalmának segítségével arra, hogy mikor teljesül $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$! Állítását bizonyítsa.

(c) *(3+3 pont)* Számítsa ki a binomiális eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét az indikátorok összegére bontásának módszerével!

Elm. 2. Legyen az X valószínűségi változó $\mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlású.

(a) *(2+6 pont)* Írja fel X sűrűségfüggvényét és számítsa ki X momentumgeneráló függvényét.

(b) *(5 pont)* Mutasson olyan $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformációt, hogy $\psi(X)$ eloszlása $\mathrm{UNI}[0, 1]$ legyen.

(c) *(3+2 pont)* Mondja ki és bizonyítsa az $\mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlás örökifjú tulajdonságát!

Elm. 3. (a) *(1+1+1+5 pont)* Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y)$. Definiálja $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ és $\mathbb{E}(Y \mid X)$ fogalmát, továbbá mondja ki és bizonyítsa a feltételes várható érték toronyszabályát.

(b) *(6 pont)* Egy bányász eltévedt a tárnában. Egy olyan teremben van, aminek három ajtaja van. Ha az első ajtót választja, akkor várhatóan három óra múlva a második ajtón át visszajut a terembe. Ha a második a ajtót választja, akkor várhatóan négy óra múlva az első ajtón át visszajut a terembe. Ha a harmadik ajtót választja, akkor várhatóan öt óra múlva kijut. A feledékeny bányász véletlenszerűen, egyenletes eloszlással és a korábbi választásaitól függetlenül választ ajtót minden alkalommal, amikor a teremben találja magát. Várhatóan hány óra múlva jut ki?

Képletgyűjtemény: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. $X \sim \mathrm{GEO}(p)$: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$. $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$: $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Gyak. 1. (16 pont) Ha a McDömötör gyorsétteremlánc Lurkóklub menüjét veszem a gyerekemnek, akkor kap mellé egy véletlenszerűen választott meglepetés fröccsöntött akciófigurát a Fehérlófia univerzum főgonoszai közül. Négyféle akciófigura van: Fanyűvő, Vasgyúró, Kőmorzsoló, és a Hétszűnyű Kapanyányimonyók. Jelölje X azon menük számát, ahányat ahhoz kell megvásárolnom, hogy összegyűljön a teljes akciófigura-kollekció. Számolja ki X várható értékét és szórásnégyzetét! *Instrukció:* Nem kell numerikusan kiszámolni, elég azokat a képleteket felírni, amiket beütne a számológépbe.

Gyak. 2. (16 pont) Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1, illetve 2. A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje Z e pontok távolságát. Meghatározandó Z eloszlásfüggvénye.

Gyak. 3. A Masztodon bevásárlóközpont szaloncukor-boltjába érkező vevők egymást követő érekezési időpontjai közt eltelt időközök egymástól függetlenek és exponenciális eloszlásúak, két perc várható értékkel. Minden vásárló, a többitől függetlenül, szabályos érmedobással dönt arról, hogy marcipános vagy pedig zselés szaloncukrot vásárol.

(a) (7 pont) Határozzuk meg a nyitás utáni első zselés szaloncukrot vásárló vevő érkezési időpontjának eloszlásfüggvényét.

(b) (11 pont) Közelítsük a CHT segítségével annak a valószínűségét, hogy a reggel 8-tól délután 2-ig érkezett vevők száma legfeljebb tízzel tér el a délután 2-től este 8-ig érkezett vevők számától.

Bónusz: (10 pont) Közelítsük annak a valószínűségét, hogy ma a 8.00-tól 14.00-ig tartó időszakban több, de a 8.00-tól 20.00-ig tartó időszakban kevesebb a marcipános vevő, mint a zselés vevő.

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000