VSZ1 VIZSGA, 2022 JAN 24.

$\boxed{\text{ELM 1}}$ a) HA $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ ÉS $a \in \mathbb{R}_+$, AKKOR

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

BIZ: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}[X \geq a]) + \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}[X < a]) \geq$

$$\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}[X \geq a]) \geq \mathbb{E}(a \cdot \mathbb{1}[X \geq a]) = a \cdot \mathbb{P}(X \geq a)$$

---

b) HA $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ AKKOR $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$

BIZ: LEGYEN $Y := (X - \mathbb{E}(X))^2$ MARKOV

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$

---

c) HA $X_1, X_2, \ldots$ F.A.E., $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, $\mathbb{E}(X_i) = m$, AKKOR

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

BIZ: $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $\sigma^2 := Var(X_i) < +\infty$

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{n \cdot m}{n} = m$$

$$Var\left(\frac{S_n}{n}\right) \overset{\text{FÜGGETLENSÉG}}{=\!=\!=} \frac{Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)}{n^2} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \overset{\text{CSEB.}}{\leq} \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \cdot n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad ✓$$

$\boxed{\text{ELM 2}}$ a) $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} =$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2)\right)$$

---

b) $G(r) = \mathbb{P}(R < r) = \begin{cases} 0, & \text{HA } r \leq 0 \\ ⭐, & \text{HA } r > 0 \end{cases}$

$⭐ = \mathbb{P}\left(\sqrt{X^2+Y^2} < r\right) = \iint\limits_{B(0,r)} f(x,y)\,dx\,dy = 🙂$, AHOL

$B(0,r) = \{ (x,y) : x^2+y^2 < r \}$

$$🙂 = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(\cos(\varphi)\cdot\hat{r}, \sin(\varphi)\cdot\hat{r}) \cdot \hat{r}\, d\varphi\, d\hat{r} =$$

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\hat{r}^2\right) \cdot \hat{r}\, d\varphi\, d\hat{r} = \int_0^r \exp\left(-\frac{1}{2}\hat{r}^2\right) \cdot \hat{r}\, d\hat{r} =$$

$$= \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}\hat{r}^2\right)\right]_0^r = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)$$

---

c) $\hat{S}_{1000} := S_{2000} - S_{1000}$

EKKOR S_{1000} ÉS $\hat{S}_{1000}$ F.A.E. $\mathrm{BIN}\left(1000, \frac{1}{2}\right)$

LEGYEN $X := \dfrac{S_{1000} - 500}{\sqrt{1000 \cdot 1/4}}$ $\quad Y := \dfrac{\hat{S}_{1000} - 500}{\sqrt{1000 \cdot 1/4}}$

DE MOIVRE - LAPLACE $\Rightarrow X \approx \mathcal{N}(0,1)$, $Y \approx \mathcal{N}(0,1)$

TOVÁBBÁ X ÉS Y FÜGGETLENEK, HISZ S_{1000} ÉS $\hat{S}_{1000}$ IS FÜGGETLENEK.

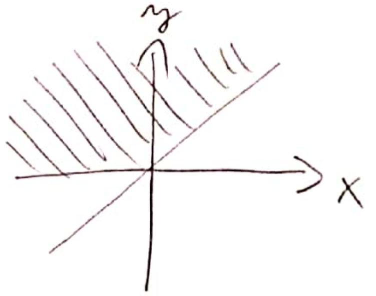
FOLYT KÖV...

ELM 2 c) FOLYTATÁS: $\mathbb{P}(S_{1000}-500>0,\ S_{2000}-1000>0)=$

$$=\mathbb{P}\big(S_{1000}-500>0,\ (S_{1000}-500)+(\hat{S}_{1000}-500)>0\big)=$$

$$\mathbb{P}(X>0,\ X+Y>0)=\mathbb{P}((X,Y)\in M)=☺,$$

AHOL



M AZ A SATÍROZOTT SZÖGTARTOMÁNY (AMINEK A SZÖGE: $\frac{3}{8}\cdot 2\pi$)

☺ $\approx \frac{3/8\cdot 2\pi}{2\pi}=\frac{3}{8}$, HISZEN HA X, Y F.A.E. $N(0,1)$, AKKOR TUDJUK, HOGY AZ (X,Y) SÍKBELI VEKTOR SZÖGE EGYENLETES A $[0,2\pi]$ INTERVALLUMON.

ELM 3 a) $X\sim GEO(p)$, HA $\mathbb{P}(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,3,\dots$

SZEMLÉLETES: FÜGGETLEN p SIKERŰ KÍSÉRLETEK, X A PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA AZ ELSŐ SIKERIG.

---

b) $q:=1-p$ $\quad \sum_{l=0}^{\infty} q^l \overset{1}{=} \frac{1}{1-q}$, $\quad \sum_{l=0}^{\infty} l\cdot q^{l-1} \overset{2}{=} \frac{1}{(1-q)^2}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} l\cdot(l-1)\cdot q^{l-2} \overset{3}{=} \frac{2}{(1-q)^3}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p\cdot(1-p)^{k-1}=p\cdot\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot q^{k-1}\overset{2}{=}\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$$

FOLYT. KÖV.

$\boxed{\text{ELM 3}}$ b) FOLYTATÁS:

$$\mathbb{E}(X\cdot(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot p\cdot(1-p)^{k-1} = p\cdot q\cdot \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot q^{k-2} \overset{(3)}{=}$$

$$= p\cdot q\cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X\cdot(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 =$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

---

c) SZEMLÉLETES: FÜGGETLEN p SIKERŰ KÍSÉRLETEK, Y A PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA AZ r-EDIK SIKERIG

$$\mathbb{P}(Y=k) = \underbrace{p^r\cdot(1-p)^{k-r}}\cdot\underbrace{\binom{k-1}{r-1}}, \quad k=r, r+1, \dots$$

AZ ELSŐ k KÍSÉRLET KÖZÜL PONTOSAN r SIKERES, ÉS ...

...ÉS A k-ADIK KÍSÉRLET SIKERES, AZ ELSŐ $k-1$ POZÍCIÓN PEDIG AKÁRHOGY ELHELYEZHETJÜK A MARADÉK $r-1$ SIKERT.

$\boxed{\text{GYAK 1}}$ λ_1 = MAZSOLÁK VÁRHATÓ SZÁMA 1 KG TÉSZTÁBAN

λ_2 = MOGYORÓK — " — " — " — " —

$\boxed{\lambda_1 = 20}$ $\quad 1 - \exp\left(-\frac{1}{10}\cdot\lambda_2\right) = \frac{3}{4}$, ÍGY $\boxed{\lambda_2 = 10\cdot\ln(4)}$

FOLYT. KÖV.

$\boxed{\text{GYAK 1}}$ FOLYTATÁS:

X := KALÁCSBAN LEVŐ MOGYORÓK SZÁMA

M := KALÁCSTÉSZTA TÖMEGE. $M \sim UNI[0.8, 1.2]$

HA $m \in \mathbb{R}_+$, AKKOR AZ $M=m$ FELTÉTEL MELLETT

X FELTÉTELES ELOSZLÁSA $POI(\lambda_2 \cdot m)$

$$\mathbb{E}(X \mid M=m) = \lambda_2 \cdot m, \quad \mathbb{E}(X \mid M) = \lambda_2 \cdot M$$

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{TORONY}}{\underset{\text{SZAB.}}{=}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid M)) = \mathbb{E}(\lambda_2 \cdot M) = \lambda_2 \cdot \frac{0.8+1.2}{2} = \lambda_2 = 13.86$$

$$Var(X \mid M=m) = \lambda_2 \cdot m \quad Var(X \mid M) = \lambda_2 \cdot M$$

$$Var(X) \overset{\text{FELTÉTELES}}{\underset{\text{SZÓRÁS}\square \text{ FORMULA}}{=}} \mathbb{E}(Var(X \mid M)) + Var(\mathbb{E}(X \mid M)) =$$

$$= \mathbb{E}(\lambda_2 \cdot M) + Var(\lambda_2 \cdot M) = \lambda_2 + \lambda_2^2 \cdot \frac{(1.2-0.8)^2}{12} = 16.42$$

<u>BÓNUSZ</u>: Y := KALÁCSBAN LEVŐ MAZSOLÁK SZÁMA

HA $M=m$, AKKOR $Y \sim POI(\lambda_1 \cdot m)$

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\lambda_2} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{\lambda_1}$$ ← HASONLÓAN $\mathbb{E}(X)$-HEZ

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid M)) \overset{\text{FELTÉTELES}}{\underset{\text{FÜGGETLENSÉG}}{=}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid M) \cdot \mathbb{E}(Y \mid M)) =$$

$$= \mathbb{E}(\lambda_2 \cdot M \cdot \lambda_1 \cdot M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mathbb{E}(M^2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \left(\left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2 + \frac{(a-b)^2}{12}\right)$$

AHOL $a = 0.8$, $b = 1.2$

GYAK 2 a) $f_X(x) = \frac{1}{5} \cdot \mathbb{1}[0<x<5]$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x]$$

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{5 \cdot x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x<5]$$

---

b) $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \star$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \underset{\boxed{0<y<5}}{=} \int_y^5 \frac{1}{5x}\,dx = \frac{1}{5} \cdot \left[\ln(x)\right]_y^5 = \frac{\ln(5/y)}{5}$$

$$\star = \frac{1}{\ln\left(\frac{5}{y}\right)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}[y<x<5], \text{ HA } 0<y<5$$

---

c) $$\mathbb{E}(Y|X=x) = \frac{x}{2}$$

$\boxed{0<y<5}$

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,dx \overset{(b)}{=} \int_y^5 \frac{1}{\ln\left(\frac{5}{y}\right)}\,dx = \frac{5-y}{\ln\left(\frac{5}{y}\right)}$$

GYAK 3 X LEHETSÉGES ÉRTÉKEI: $1, 2, \ldots, n+1$

$$\mathbb{P}(X=r) = \frac{\binom{n+m-r}{m-1}}{\binom{n+m}{m}}$$

AZ ELSŐ $r-1$ POZÍCIÓN FÉRFI VAN, A r-ADIKON NŐ ÉS A MARADÉK $n+m-r$ POZÍCIÓN $m-1$ NŐT KELL SZÉTOSZTANI

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+m+1}{m+1},$$ HASONLÓAN A 2021.10.21. DÁTUMÚ VSZ1 ZH BÓNUSZ FELADATÁNAK MINTAMEGOLDÁSÁHOZ.