

NÉV: NEPTUN-KÓD: SZAK:

Valószínűségyszámítás ZH1, 2023. okt. 19., A csoport 08:05–08.50

Munkaidő: 45 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható.

Az elérhető maximum (a bónusz feladattal együtt): 24 pont, de már 20 pont is 100%-os eredménynek számít.

1. A BME η épületében 10 tanterem van, rendre 001, 002, ... 010 számozással. Hétfőn este közvetlen 21.00 előtt a tantermek mindegyikében ég 3-3 lámpa. Ezeket a lámpákat a portásfülkében, egy központi kapcsolószekrényen elhelyezett 30 kapcsolóval lehet lekapcsolni. Minden lámpához pontosan egy kapcsoló tartozik, de a kapcsolószekrényen nincsenek jelzések, nem tudni, melyik lámpát melyik kapcsoló vezérli. Pontban 21.00-kor egy éjjeliőr az energiatakarékosság jegyében véletlenszerűen kiválaszt és lekapcsol a 30-ból pontosan 10 kapcsolót. Én ekkor épp a 001 teremben tartok valószínűségyszámítás konzultációt. Az alábbi kérdésekre nem várunk numerikus értéket, elég binomiális együtthatók segítségével kifejezni a választ.
 - (a) (2 pont) Mi a valószínűsége, hogy a 001 teremben mindhárom lámpa égve marad?
 - (b) (2 pont) Mi a valószínűsége, hogy a 001 terem teljes sötétségbe borul (azaz, az éjjeliőr a terem mindhárom lámpáját lekapcsolja)?
 - (c) (6 pont) Mi a valószínűsége, hogy a 10 tanterem egyike sem borul teljes sötétségbe?

 2. Egy nagy kutatóintézet komolyabb számításaira négy szervert használ, ezek neve rendre Euler, Fermat, Gauss és Hilbert. A szerverekre minden hétköznap 6.00 és 22.00 között küldhetnek a kutatók számítási feladatokat. Az intézetben sok kutató dolgozik, egy adott nap mindegyikük (egymástól, és a többi naptól függetlenül) kis valószínűséggel küld számítási feladatot a szervereknek. A szerverek a beérkező feladatokat a következő protokoll szerint dolgozzák fel: minden egyes nap, az első beérkező feladatot Euler kapja, a másodikat Fermat, a harmadikat Gauss, a negyediket Hilbert, az ötödiket Euler, a hatodikat Fermat, és így tovább. Ezt a protokollt régóta alkalmazzák, és tudjuk, hogy a hétköznapok körülbelül huszadában egyáltalán nem érkezett számítási feladat a szerverekre.
 - (a) (5 pont) Mi a valószínűsége, hogy 2023. október 19-én mind a négy szerver pontosan egy új számítási feladatot kap?
 - (b) (5 pont) Mi a valószínűsége, hogy 2023. október 20-án Fermat kap legalább két új számítási feladatot?
- Bónusz** (4 pont) Mi a valószínűsége, hogy 2023. október 24-én pontosan ugyanannyi új feladatot kap Euler, Fermat, Gauss és Hilbert? (*Megjegyzés: nem csupán egy végtelen sort, hanem egy konkrét számértéket is várunk.*)

1. A vadnyugati lóvásáron két lókupec (Joe és Donald) árul lovakat. Donald lovai, egymástól függetlenül, 20% valószínűséggel sánták, míg Joe lovai, egymástól függetlenül, 10% valószínűséggel sánták. Ezen a héten odamegyek egy véletlenül választott lókupechez és veszek két lovat. Jövő héten újra megyek a vásárra még egy lovat venni. Ha ez első héten vásárolt lovaim közt nem volt sánta, akkor jövő héten is ugyanattól a kupectől vásárolok, de ha volt köztük sánta, akkor jövő héten a másikhoz megyek. Barátaim, Bill, George és Barack, tőlem és egymástól függetlenül, ugyanezzel az eljárással vásárolnak lovakat.
 - (a) (2 pont) Az *első héten* vett lovaim közt mekkora valószínűséggel volt sánta?
 - (b) (2 pont) Tudjuk, hogy Bill *első héten vásárolt két lova között volt sánta*. Milyen valószínűséggel vásárolt Bill az első héten Donald-tól, illetve Joe-tól?
 - (c) (2 pont) Tudjuk, hogy George *első héten vásárolt két lova közül egyik sem volt sánta*. Milyen valószínűséggel vásárolt George az első héten Donald-tól, illetve Joe-tól?
 - (d) (4 pont) Barack-ról még nem tudjuk, milyen lovakat vásárolt az első héten. Mekkora valószínűséggel lesz Barack *második* héten vásárolt lova sánta?
2. Egy társasházban 5 lakás található. A közös képviselő minden hónap első hétfőjén 18.00-kor összehívja a lakógyűlést, amely akkor szavazatképes, ha a tulajdonosok legalább 50%-a megjelenik (a közös képviselő nem számít tulajdonosnak). Minden tulajdonos (a többi tulajdonostól és a korábbi hónapokban történtektől függetlenül) $2/3$ valószínűséggel jelenik meg egy lakógyűlésen. Ha a lakógyűlés nem szavazatképes, akkor a közös képviselő feloszlatja a lakógyűlést és ugyanaznap 18.15-kor új lakógyűlést hív össze, ami a megjelent lakók számától függetlenül szavazatképes. Jelölje p annak a valószínűségét, hogy a jövő hónapban 18.00-kor kezdődő lakógyűlés szavazatképes.
 - (a) (5 pont) Számolja ki p értékét.
 - (b) (5 pont) Jövőre várhatóan hány lakógyűlést fognak tartani (beleértve a szavazatképteleneket is)?

Bónusz (4 pont) Én vagyok az egyik tulajdonos. Mostantól számítva hány 18.00-kor kezdődő lakógyűlést ülök végig, mielőtt egy 18.15-kor kezdődő lakógyűlést is végig kell ülnöm?

Instrukció: A fenti (a) és Bónusz kérdésekre adott választ három tizedesjegy pontossággal kérjük kiszámolni. A (b) részfeladatban viszont csak egy egyszerű képletet kérünk, amely tartalmazhatja az (a) feladatbeli p valószínűséget paraméterként.