A Bures és Hellinger távolság egy paraméteres kiterjesztése és trace karakterizációk

Komálovics Ábel

TDK dolgozat

Témavezető: Dr. Molnár Lajos

MŰEGYETEM 1782

Budapest, Magyarország
2022

1. Bevezető és az eredmények áttekintése

A dolgozatban szereplő összes eredmény új, valamint részét képezi egy, a témavezetővel, Molnár Lajossal közös cikknek [11], amely a J. Math. Anal. Appl. egy különszámába került felkérésre, és elbírálás alatt van. Lejjebb a cikkben szereplő állítások szerepelnek, viszont csak a jelen dolgozat szerzőjének eredményeire szerepel bizonyítás. Nevezetesen, az 1. állítás és a 3. tétel minden $p \geq 0$-ra mond ki eredményt, utánuk azonban csak a $p = 0$ esetek bizonyítása található, mivel a $p > 0$ esetet a témavezető bizonyítja [11]-ban.

A Hellinger távolság kvantumos változatai (valószínűségi eloszlásokon) fontos szerepet játszanak a kvantum-információelméletben. Az $n \times n$-es komplex mátrixok $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ pozitív szemidefinit kúpján a következőképpen definiáljuk a két legtöbbet tanulmányozott változatot (lásd [2]):

$$d_H(A,B) = \sqrt{2}\left(\mathrm{Tr}\left((A+B)/2 - A^{1/4}B^{1/2}A^{1/4}\right)\right)^{1/2}, \quad A,B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+ \tag{1}$$

és

$$d_B(A,B) = \sqrt{2}\left(\mathrm{Tr}\left((A+B)/2 - (A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2}\right)\right)^{1/2}, \quad A,B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+. \tag{2}$$

Ez a két függvény valódi metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$-on. Az utóbbit Bures vagy Bures-Wasserstein távolságnak nevezzük, az előbbit pedig, ami a klasszikus Hellinger távolság legtriviálisabb kiterjesztése a kvantumos környezetre, szintén Hellinger távolságnak nevezzük, lásd pl. [18]. A fenti (1) és (2) egyenletekben a trace alatt, amit Tr-rel jelölünk, megjelenik a számtani középnek és a geometriai közép két variánsának különbsége. Látható, hogy az utóbbi két operáció valójában egy természetes paraméteres család tagjai, amely geometriai-közép-szerű műveletekből áll, és kiterjeszthető általános C^*-algebák környezetébe a következőképpen.

Legyen $\mathscr{A}$ egy C^*-algebra. Az elkövetkezőkben végig feltesszük, hogy $\mathscr{A}$ egységelemes. Jelölje $\mathscr{A}^+$ az $\mathscr{A}$ pozitív szemidefinit kúpját ($\mathscr{A}$ összes önadjungált, nemnegatív spektrummal rendelkező elemének halmazát), $\mathscr{A}^{++}$ pedig $\mathscr{A}$ pozitív definit kúpját ($\mathscr{A}$ összes önadjungált, szigorúan pozitív spektrumú elemének halmazát). A következőképpen vezethetjük be az előbbi operációk paraméteres családját. Tetszőleges $p > 0$ pozitív valós számra legyen

$$A\kappa_p B = (A^{p/4}B^{p/2}A^{p/4})^{1/p}, \quad A,B \in \mathscr{A}^+.$$

Az úgynevezett szimmetrizált Lie-Trotter formula alapján minden $X,Y \in \mathscr{A}$-ra

$$\left(e^{(p/2)X}e^{pY}e^{(p/2)X}\right)^{1/p} \xrightarrow{p\to 0} e^{X+Y}$$

teljesül, ahol a határérték a normában értendő. Ebből következik, hogy minden $A,B \in \mathscr{A}^{++}$-ra

$$A\kappa_p B \xrightarrow{p\to 0} \exp((\log A + \log B)/2).$$

Ezen határértéket A és B log-Euklideszi közepének szokás nevezni.

Ezek alapján tetszőleges $A,B \in \mathscr{A}^{++}$-ra bevezetjük a következő jelölést:

$$A\kappa_0 B = \exp((\log A + \log B)/2).$$

Minden κ_p egy variánsa a klasszikus Kubo-Ando (vagy eredetileg Pusz-Horowitz) geometriai középnek, ami a következőképpen van definiálva:

$$A\#B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}, \quad A,B \in \mathscr{A}^{++}.$$

Valóban, ha A és B felcserélhető, akkor a fenti operációink mind egybeesnek. Megjegyezzük, hogy a κ_p operációk a kvantum Rényi-divergencia egyes változatainak kontextusában is fellépnek. Lásd, például [14] és hivatkozásai.

A következőkben használni fogjuk a számtani középre elterjedt jelölést, ami

$$A\nabla B = \frac{A+B}{2}, \quad A, B \in \mathscr{A}^+.$$

Látható, hogy minden $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$-ra

$$d_H(A,B) = \sqrt{2}\,(\mathrm{Tr}\,(A\nabla B - A\kappa_1 B))^{1/2}$$

és

$$d_B(A,B) = \sqrt{2}(\mathrm{Tr}(A\nabla B - A\kappa_2 B))^{1/2}.$$

Ezek a kifejezések könnyen definiálhatók C^*-algebrákra vonatkozólag. Tegyük fel, hogy τ egy pozitív lineáris funkcionál $\mathscr{A}$-n, amely hűséges és trace-szerű. Az előbbi azt jelenti, hogy minden $A \in \mathscr{A}^+$-ra $\tau(A) = 0$-ból következik $A = 0$, az utóbbi pedig azt, hogy $\tau(XY) = \tau(YX)$ teljesül minden $X, Y \in \mathscr{A}$-ra.

Ezen dolgozatban minden p nemnegatív valós számra szeretnénk bevezetni a

$$d_p^\tau(A,B) = \left(\tau(A\nabla B - A\kappa_p B)\right)^{1/2}, \quad A, B \in \mathscr{A}^+,$$

kifejezést, és vizsgálni, mint lehetséges távolság mértéket.

Ha d_p^τ-t szeretnénk tanulmányozni, akkor először azt kell meggondolnunk, hogy jóldefiniált-e, azaz a négyzetgyök alatt nemnegatív kifejezés áll-e. Elsőként egy erősebb kérdést vizsgálunk: mikor tejesül $A\nabla B - A\kappa_p B$ nemnegativitása minden $A, B \in \mathscr{A}^{++}$ esetén? A 1. állítás következménye, hogy ez csak kommutatív algebrákban lehetséges. Ezek után megmutatjuk, hogy $d_p = d_p^{\mathrm{Tr}}$ jóldefiniált $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$-on minden $p \geq 0$ esetén, valamint d_p^τ is jóldefiniált tetszőleges C^*-algebra pozitív kúpján, ha $p \leq 2$.

Ezek után természetes módon vetődik fel d_p^τ metrikusságának kérdése. A $p = 1$ és $p = 2$ esetben ismert eredmény, hogy d_1^τ és d_2^τ valódi metrika, amire [11]-ben egy új, elemibb és transzparensebb érvelés is szerepel. Az általános, d_p^τ, $p \geq 0$ eset azonban igen nehéznek tűnik, csak részleges eredményünk van. Nevezetesen, megmutatjuk, hogy $d_p = d_p^{\mathrm{Tr}}$ pontosan akkor valódi metrika teszőleges Hilbert-tér egyrangú vetítéseinek (a tiszta állapotainak) halmazán, ha $p \leq 2$.

A 3. állítás egy másik nézőpontból közelíti meg $\tau(A\nabla B - A\kappa_p B)$ pozitivitását, ugyanis azt mondja, hogy ha egy pozitív lineáris funkcionál minden $A\nabla B - A\kappa_p B$, $A, B \in \mathscr{A}^{++}$ alakú elemen nemnegatív értéket vesz fel, akkor szükségképpen trace-szerű. Ez azt jelenti, hogy ha φ olyan pozitív lineáris funkcionál $\mathscr{A}$-n, amelyre d_p^φ jóldefiniált, akkor φ-nek trace-szerűnek kell lennie. Ez a trace-szerű pozitív lineáris funkcionálok egy új trace karakterizációjára ad lehetőséget.

A dolgozat utolsó részében Sra egyik eredményét [19] tekintjük, amely szerint a szimmetrikus Stein-divergencia négyzetgyöke valódi metrika mátrixalgebrák pozitív definit kúpjain. Észrevesszük, hogy ez az érték megegyezik a számtani közép logaritmusának és a paraméteres családunk bármely κ_p tagja logaritmusának különbségéből vett trace négyzetgyökével. Valóban, mátrixalgebrákon κ_p logaritmusa nem függ a p paramétertől a determináns multiplikativitásának köszönhetően. Megmutatjuk, hogy ez a függetlenség kitünteti a trace-t a korlátos lineáris funkcionálok közül. Pontosabban, a 4. tételben megmutatjuk hogy Neumann algebrákon, ha egy φ korlátos lineáris funkcionálra két adott különböző p, q nemnegatív valós szám esetén $\varphi(\log A\kappa_p B) = \varphi(\log A\kappa_q B)$ teljesül minden $A, B \in \mathscr{A}^{++}$ elemre, akkor φ trace-szerű. Ezt az eredményt úgy is lehet értelmezni, mint a determináns egyfajta karakterizációját (pozitív definit mátrixokon a logaritmus trace-e megegyezik a determináns logaritmusával).

Ezek után rátérünk az eredmények precíz bemutatására.

2. Egy centralitás karakterizáció d_p^τ segítségével

Ha pozitív kúpokon szereték vizsgálni d_p^τ-t, akkor meg kell vizsgálnunk a

$$\tau(A\nabla B - A\kappa_p B) \geq 0$$

egyenlőtlenség érvényességét, ami bizonyítaná d_p^τ jóldefiniáltságát. A következő eredményben ezzel a problémával kapcsolatban tekintünk egy erősebb kérdést: mikor pozitív elem $A\nabla B - A\kappa_p B$? Az alábbi eredményünk a centrális pozitív definit elemek egy karakterizációjának is tekinthető.

1. Állítás. *Legyen $\mathscr{A}$ egy C^*-algebra és p egy nemnegatív valós szám. Ha $B \in \mathscr{A}^{++}$ rögzített, és*

$$A\kappa_p B \leq A\nabla B$$

teljesül minden $A \in \mathscr{A}^{++}$ esetén, akkor B szükségképpen centrális elem $\mathscr{A}$-ban ($\mathscr{A}$ minden elemével felcserélhető). Ha pedig $A \in \mathscr{A}^{++}$ rögzített, és a fenti egyenlőtlenség teljesül minden $B \in \mathscr{A}^{++}$-re, akkor A centrális.

Bizonyítás: Mint a [16] cikkben található Proposition 4 bizonyításában, Kadison nevezetes tranzitivitási tételéből következő a meglepő tény, hogy a fenti általános állítás bizonyítható, ha igazolni tudjuk azt az $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ speciális algebrára. A következőekben erre az algebrára bizonyítjuk az állítást.

A $p > 0$ esetet lásd [11]. Az alábbiakban feltesszük, hogy $p = 0$. Ehhez az esethez két eszközre lesz szükségünk. Az első a következő. A [16] cikkben szereplő Proposition 8 bizonyításában kiderült, hogy bármely $T \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ önadjungált mátrixra és $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ egyrangú projekcióra

$$e^{(T-n(I-P))} \to e^{\operatorname{Tr} TP} P, \tag{3}$$

amint $n \to \infty$. A második eszköz, amit használni fogunk, a következő. Tegyük fel, hogy P egy egyrangú projekció, t egy pozitív szám és A egy pozitív definit mátrix, amire

$$tP \leq A.$$

Szorozzuk be mindkét oldalról $A^{-1/2}$-nel, így az egyenlőtlenségünk már a $tA^{-1/2}PA^{-1/2} \leq I$ alakot ölti. Könnyű belátni, hogy $tA^{-1/2}PA^{-1/2}$ egyetlen pozitív sajátértéke $t \operatorname{Tr} A^{-1}P$, amikből következik, hogy

$$t \leq \frac{1}{\operatorname{Tr} A^{-1}P}. \tag{4}$$

Ezek után a $p = 0$ eset bizonyítása következik. Tegyük fel, hogy

$$\exp\left(\frac{\log A + \log B}{2}\right) \leq \frac{A+B}{2}$$

teljesül valamely rögzített $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$-ra és minden $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$-ra. Ekkor A és B felírható e^C és e^D alakba valamilyen önadjungált $C, D \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ elemekre (D rögzített, C változó). Legyen $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ egy egyrangú projekció, és legyen $C_n = D - n(I-P)$. Ekkor

$$\exp\left(\frac{2D - n(I-P)}{2}\right) \leq \frac{e^{D-n(I-P)} + e^D}{2}.$$

Ha határértéket veszünk, akkor (3) alapján láthatjuk, hogy

$$e^{\operatorname{Tr} DP} P \leq \frac{e^{\operatorname{Tr} DP} P + e^D}{2}. \tag{5}$$

Ha mindkét oldalt beszorozzuk 2-vel, és átrendezzük az egyenletet, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{\operatorname{Tr} DP} P \leq e^D. \tag{6}$$

A (4) egyenlőtlenséghez vezető gondolatmenet alapján ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy

$$e^{\operatorname{Tr} DP} \leq \frac{1}{\operatorname{Tr} e^{-D} P}. \tag{7}$$

Legyen e^D spektrálfelbontása a következő:

$$e^D = d_1 R + d_2(I - R), \tag{8}$$

ahol $d_1, d_2 > 0$ pozitív valós szám, és R egyrangú projekció. A (7) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy

$$e^{\log(d_1)\operatorname{Tr} RP + \log(d_2)(1-\operatorname{Tr} RP)} \le \frac{1}{d_1^{-1}\operatorname{Tr} RP + d_2^{-1}(1-\operatorname{Tr} RP)}.$$

Ha bevezetjük a $t = \operatorname{Tr} RP$ jelölést, akkor a következőt kapjuk,

$$d_1^t d_2^{1-t} \le \frac{1}{t d_1^{-1} + (1-t) d_2^{-1}}.$$

Azonban t bármilyen 0 és 1 közötti szám lehet (emlékezzünk rá, hogy P tetszőleges egyrangú projekció), tehát az egyenlőtlenség $t = 1/2$-re is igaz, azaz

$$\sqrt{d_1 d_2} \le \frac{2}{d_1^{-1} + d_2^{-1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy d_1 és d_2 geometriai közepe nem több, mint a harmonikus közepük, amiből következik, hogy $d_1 = d_2$, tehát $B = e^D = d_1 I$. Ezzel az állítás bizonyítása teljes. ■

Kiemeljük az érdekességet, hogy mind az 1. állítás és a 3. tétel is bizonyítható C^*-algebrákra úgy, hogy csak az $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ speciális algebrán igazoljuk. Ennek az oka a két állítás esetében azonban különböző.

Visszatérünk az eredeti problémára, azaz a d_p-k és a d_p^τ-k jóldefiniáltságának kérdésére. A híres Araki-Lieb-Thirring egyenlőtlenség szerint minden $r \ge 1$-re és $p > 0$-ra

$$\operatorname{Tr}(A^{1/2} B A^{1/2})^{rp}) \le \operatorname{Tr}(A^{r/2} B^r A^{r/2})^p \tag{9}$$

teljesül bármely $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ esetén (lásd a (6.36) egyenlőtlenséget a [10] cikkben, vagy az eredeti forrást [1]). Ha két tetszőleges $0 < p \le q$ pozitív számot tekintünk, és a (9) egyenlőtlenségbe p helyére $1/q$-t írunk, rögzítjük $r = q/p$-t, majd A-t A^p-vel, B-t pedig B^p-vel helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{Tr}(A^{p/2} B^p A^{p/2})^{1/p} \le \operatorname{Tr}(A^{q/2} B^q A^{q/2})^{1/q} \tag{10}$$

teljesül minden $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ esetén. Ebből következik, hogy

$$0 \le \operatorname{Tr}(A \nabla B - A \kappa_2 B) \le \operatorname{Tr}(A \nabla B - A \kappa_p B), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$$

minden $0 \le p \le 2$-re. (Megjegyezzük, hogy az $1 \le p \le 2$ esetben a [8] cikkben bizonyításra került, hogy d_p úgynevezett kvantum-divergencia, lásd Definition 2.1 és Theorem 3 a cikkben). De mi a helyzet $\operatorname{Tr}(A \nabla B - A \kappa_p B)$ nemnegativitásával akkor, amikor $p > 2$? A [11] cikkben ebben az esetben is igazolást nyert a nemnegativitás. Ennek következményeképp d_p minden $p \ge 0$-ra jóldefiniált $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$-on.

A fenti megállapítások közül melyek azok, amelyek a C^*-algebrák sokkal általánosabb környezetében is igazak maradnak? A [11] cikk kezeli a $p \le 2$ esetet, ott teljesül a nemnegativitás, azonban a $p > 2$ eset megoldatlan maradt, ezzel kapcsolatban a következő problémát fogalmazzuk meg.

1. *Probléma.* Igaz-e, hogy egy tetszőleges, τ hűséges pozitív trace-szerű lineáris funkcionállal rendelkező $\mathscr{A}$ C^*-algebrára $\tau(A \nabla B - A \kappa_p B) \ge 0$ teljesül minden $A, B \in \mathscr{A}^+$ és $p > 2$ esetén?

3. d_p AZ EGYRANGÚ VETÍTÉSEK HALMAZÁN

Tudjuk, hogy $d_1 = d_H$ és $d_2 = d_B$ valódi metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$-on. Természetesen adódik a kérdés, hogy mi történik a $p \neq 1,2$ esetében. A következő állításunkban bebizonyítjuk, hogy d_p egyik $p > 2$-re sem teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget már a 2×2-es mátrixok esetében sem.

Az eredmény kimondása előtt megjegyezzük a következőt: legyen H egy (tetszőleges dimenziójú) Hilbert-tér, és jelölje H összes egyrangú vetítésének halmazát $P_1(H)$. Ha p egy pozitív valós szám, akkor bármely $P,Q \in P_1(H)$ esetén a $d_p(P,Q) = (1-\mathrm{Tr}(PQP)^{1/p})^{1/2}$ mennyiség jóldefiniált, valamint $d_p(P,Q) = \sqrt{1-\cos^{2/p}\alpha}$ teljesül, ahol $\alpha \in [0,\pi/2]$ a szög P és Q képtere között.

Az állításunk a következő:

2. Állítás. *Legyen H egy Hilbert-tér, melyre* $\dim H > 1$. *Ekkor d_p akkor, és csak akkor metrika $P_1(H)$-n, ha $p \le 2$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $p > 2$. Nyilvánvalóan elegendő belátni az állítást $H = \mathbb{C}^2$ esetre. Legyen P,Q két egymásra merőleges egyrangú projekció, és legyen R egy egyrangú projekció úgy, hogy P és R képtere közti szög $\alpha \in [0,\pi/2]$. Azt állítjuk, hogy létezik olyan α, amire

$$1 = d_p(P,Q) > d_p(P,R) + d_p(R,Q) = \sqrt{1-\cos^{2/p}\alpha} + \sqrt{1-\sin^{2/p}\alpha}$$

teljesül. Ha itt négyzetre emelünk, és átrendezünk, akkor az egyenlőtlenség ezt az ekvivalens alakot ölti:

$$\cos^{2/p}\alpha + \sin^{2/p}\alpha - 1 > 2\sqrt{1-\cos^{2/p}\alpha}\sqrt{1-\sin^{2/p}\alpha}.$$

Ha még egyszer négyzetre emelünk, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}&\cos^{4/p}\alpha + \sin^{4/p}\alpha + 1 - 2\cos^{2/p}\alpha - 2\sin^{2/p}\alpha + 2\cos^{2/p}\alpha\sin^{2/p}\alpha \\ &\quad > 4 - 4\cos^{2/p}\alpha - 4\sin^{2/p}\alpha + 4\cos^{2/p}\alpha\sin^{2/p}\alpha.\end{aligned}$$

Átrendezés után láthatjuk, hogy

$$0 > 3 - 2(\cos^{2/p}\alpha + \sin^{2/p}\alpha) - (\cos^{2/p}\alpha - \sin^{2/p}\alpha)^2$$

A $t = \cos^2\alpha$ helyettesítés bevezetése után azt kell bebizonyítanunk, hogy valamely $t \in [0,1]$-re

$$0 > 3 - 2(t^{1/p} + (1-t)^{1/p}) - (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})^2.$$

Legyen

$$f(t) = 3 - 2(t^{1/p} + (1-t)^{1/p}) - (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})^2, \quad t \in [0,1].$$

Ekkor $f(0) = 0$. Az f deriváltja bármely $0 < t < 1$ pontban

$$f'(t) = -(2/p)\big((t^{1/p-1} - (1-t)^{1/p-1}) + (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})(t^{1/p-1} + (1-t)^{1/p-1}\big).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned}-(p/2)f'(t) &= (t^{1/p-1} - (1-t)^{1/p-1}) + (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})(t^{1/p-1} + (1-t)^{1/p-1}) \\ &= t^{2/p-1} + t^{1/p-1}(1-(1-t)^{1/p}) - (1-t)^{1/p-1}(1-t^{1/p} + (1-t)^{1/p}) \\ &\ge t^{2/p-1} - (1-t)^{1/p-1}(1-t^{1/p} + (1-t)^{1/p}).\end{aligned}$$

Ahogy $t \to 0$, az utóbbi kifejezés a végtelenbe tart, ezért elég kis pozitív t-re a derivált $f'(t)$ negatív. Mivel $f(0) = 0$, azt kapjuk, hogy $f(t) < 0$ elég kicsi pozitív t-re. Ezzel kész a bizonyítás abban az esetben, amikor $p > 2$.

Most tegyük fel, hogy $0 < p < 2$. Legyen $P, Q \in P_1(H)$ projekció, melyek képterének szöge α. Korábban már említettük, hogy ekkor $d_p(P,Q) = \sqrt{1-\cos^{2/p}\alpha}$. Jelöljük f-fel α-nak ezt a függvényét, amit a $[0,\pi/2]$ intervallumon értelmezünk.

Válasszunk tetszőleges $P, Q, R \in P_1(H)$ vetítést. Legyen P és R képterének szöge α, az R és Q képteree közti szög pedig legyen β.

Tegyük fel, hogy a

$$f(\alpha+\beta) \le f(\alpha) + f(\beta) \tag{11}$$

egyenlőtlenség igaz minden $\alpha, \beta \in [0,\pi/2]$-re, amire $\alpha+\beta \in [0,\pi/2]$.

Legyen γ a szög P és Q képtere között. Ekkor nyilván $\gamma \le \alpha+\beta$, tehát ha $\alpha+\beta \le \pi/2$, akkor (11) és f monotonitása alapján teljesül a háromszög egyenlőtlenség:

$$d_p(P,Q) = f(\gamma) \le f(\alpha+\beta) \le f(\alpha)+f(\beta) = d_p(P,R) + d_p(R,Q).$$

Az $\alpha+\beta > \pi/2$ eset is egyszerű. Ismét (11) és f monotonitásának alkalmazásával láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_p(P,Q) =& f(\gamma) \le f(\pi/2) \le f(\pi/2-\beta) + f(\beta) \\ \le& f(\alpha)+f(\beta) = d_p(P,R)+d_p(R,Q). \end{aligned}$$

Tehát csak a (11) egyenlőtlenséget kell igazolnunk, ami ekvivalens a következővel:

$$f(s) + f(t-s) - f(t) \ge 0, \quad 0 \le s \le t \le \pi/2.$$

Rögzítsünk egy $t_0 \in [0,\pi/2]$ számot, és tekintsük az előbbi egyenlőtlenség bal oldalát, mint s egy függvényét. Látható, hogy $s=0$ és $s=t_0$ esetén teljesül a kívánt egyenlőtlenség. Bebizonyítjuk, hogy s-nek ez a függvénye konkáv $[0,t_0]$-on, ami bizonyítja az állításunkat. A kérdéses függvény második deriváltja f második deriváltjának a kétszerese. Számoljuk ki f második deriváltját. Az f függvény első deriváltja

$$\begin{aligned} f'(t) &= (1/2)(1-\cos^{2/p} t)^{-1/2}(-2/p)\cos^{2/p-1} t(-\sin t)) \\ &= (1/p)(1-\cos^{2/p} t)^{-1/2}\cos^{2/p-1} t \sin t) \\ &= (1/p)\frac{\cos^{2/p-1} t\sin t}{f(t)}. \end{aligned}$$

Ez alapján kiszámoljuk a második deriváltat,

$$\begin{aligned} f''(t) &= (1/p)\frac{\big((2/p-1)\cos^{2/p-2} t(-\sin t)\sin t + \cos^{2/p-1} t\cos t\big) f(t) - \cos^{2/p-1} t \sin t (1/p)\frac{\cos^{2/p-1} t\sin t}{f(t)}}{f(t)^2} \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{pf(t)^2}\left(-((2/p-1)\cos^{-2} t\sin^2 t f(t) + f(t) - (1/p)\frac{\cos^{2/p} t\cos^{-2} t\sin^2 t}{f(t)}\right) \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{pf(t)^3}\big(-(2/p)\tan^2 t f(t)^2 + \tan^2 t f(t)^2 + f(t)^2 - (1/p)\cos^{2/p} t\tan^2 t\big) \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{pf(t)^3}\big(-(2/p)\tan^2 t f(t)^2 + \tan^2 t f(t)^2 + f(t)^2 - (1/p)(1-f(t)^2)\tan^2 t\big) \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{pf(t)^3}\big((1+\tan^2 t) f(t)^2 - (1/p)(1+f(t)^2)\tan^2 t\big). \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy

$$(1+\tan^2 t)f(t)^2 - (1/p)(1+f(t)^2)\tan^2 t \le 0,$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\frac{f(t)^2}{1+f(t)^2} \le \frac{1}{p}\frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \frac{1}{p}\sin^2 t.$$

Ezt f definíciója alapján a következőképpen tudjuk átírni:

$$\frac{1-\cos^{2/p} t}{2-\cos^{2/p} t} \le \frac{1}{p}(1-\cos^2 t).$$

Változócsere után így néz ki az előző egyenlőtlenség:

$$\frac{1-t}{2-t} \le \frac{1}{p}(1-t^p).$$

Azt állítjuk, hogy minden $t \in [0,1]$-re

$$\frac{1-t}{2-t} \le \frac{1}{2}(1-t^2) \le \frac{1}{p}(1-t^p). \tag{12}$$

Az első egyenlőtlenséget könnyű közvetlenül belátni, így csak a másodikkal foglalkozunk. Tekintsük a

$$t \mapsto \frac{t^p}{p} - \frac{t^2}{2}$$

függvény deriváltját. Láthatjuk, hogy a derivált eltűnik a 0-ban, $]0,1[$-en pozitív, és 1-ben újra 0. Ebből következik, hogy a fenti függvény az 1-ben veszi fel a maximális értékét, tehát

$$\frac{t^p}{p} - \frac{t^2}{2} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \quad t \in [0,1].$$

Átrendezés után megkapjuk a (12)-ben szereplő második egyenlőtlenséget. Ezzel a $0 < p < 2$ eset bizonyítása teljes. A $p = 0$ esetet a $p \to 0$ határérték vételével kapjuk meg. ■

Ami d_p és d_p^τ metrikus tulajdonságainak kérdését illeti, a következő, minden bizonnyal nehéz kérdéseket fogalmazzuk meg.

2. *Probléma.* Igaz, hogy $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$-on $(n \ge 2)$ d_p metrika minden $1 < p < 2$-re, és egyik $0 < p < 1$-re sem metrika? Mi a helyzet általános C^*-algebrák esetén? Igaz, hogy d_p^τ metrika, ha $1 < p < 2$?

Ami a mátrixalgebrákat illeti, megjegyezzük, hogy matematikai szoftveres tesztek alapján úgy hisszük, az első két kérdésre pozitív a válasz.

Azt is megemlítjük, hogy ha $0 < p < 1$-re d_p valóban nem metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$-on $(n \ge 2)$, akkor egy, a [11] cikkben szereplő módszerrel bizonyítani lehet, hogy ha tetszőleges $\mathscr{A}$ C^*-algebrára d_p^τ valódi metrika $\mathscr{A}^+$ pozitív kúpján valamely $0 < p < 1$-re, akkor $\mathscr{A}$ szükségképpen kommutatív.

4. Egy trace karakterizáció d_p^τ segítségével

Az 1. állítás alapján d_p^τ jóldefiniáltsága nem teljesül a legtriviálisabb módon, nevezetesen egy $A\nabla B - A\kappa_p B$ alakú elem pozitivitása csak speciális esetekben igaz. Az előbb láttuk, hogy bizonyos p paraméterekre minden ilyen alakú elem képe nemnegatív egy trace-szerű pozitív lineáris funkcionál szerint. Következő eredményünk megmutatja, hogy nem is létezhet más típusú pozitív lineáris funkcionál, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezne.

3. Tétel. *Legyen $\mathscr{A}$ egy C^*-algebra és p egy tetszőleges nemnegatív valós szám. Ha φ egy pozitív lineáris funkcionál $\mathscr{A}$-n, amire*

$$\varphi(A\kappa_p B) \le \varphi(A\nabla B), \quad A, B \in \mathscr{A}^{++}, \tag{13}$$

akkor φ szükségképpen trace-szerű.

A bizonyítás előtt teszünk néhány rövid megjegyzést.

Először is, az első állításra visszautalva, a fenti eredményt úgy is lehet értelmezni, hogy az $A\kappa_p B \leq A\nabla B$ egyenlőtlenség annyira nem igaz, ha egy φ pozitív lineáris funkcionálra $\varphi(A\kappa_p B) \leq \varphi(A\nabla B)$ teljesül minden $A, B \in \mathscr{A}^{++}$ esetén, akkor φ trace-szerű. Valóban, véges faktor Neumann algebrákban φ csak a normalizált trace skalárszorosa lehet.

Másodjára, Bikchentaev számos, a 3. állításunkhoz hasonló eredményt mutatott be cikkeiben. A megfigyeléseit Gardner [9] munkája motiválta, amiben bizonyítást nyert, hogy ha egy $\mathscr{A}$ C^*-algebrán értelmezett φ pozitív lineáris funkcionál teljesíti a $|\varphi(A)| \leq \varphi(|A|)$ egyenlőtlenséget minden $A \in \mathscr{A}$-ra, akkor φ trace-szerű. Bikchentaev eredményei közül a miénkhez legközelebbi a [4] cikkben szereplő Theorem 2. Ebben megmutatja, hogy ha a (9) Araki-Lieb-Thirring egyenlőtlenség teljesül egy C^*-algebrán értelmezett φ pozitív lineáris funkcionálra egy adott $r > 1, p > 0$ párra, akkor φ trace-szerű. Bár a mi eredményünk hasonló, a feltételünk bizonyos értelemben jelentősen gyegébb: mi csak annyit várunk el φ-től, hogy valamilyen számtani-mértani egyenlőtlenséget teljesítsen, míg [4] egy geometriai típusú közép két variánsa közti egyenlőtlenséget feltételez.

Bizonyítás: Ahogy Bikchentaev tette, mi is Gardner bizonyításának gondolatát követjük azzal, hogy redukáljuk a problémát arra a speciális esetre, amikor $\mathscr{A}$ a 2×2-es mátrixok algebrája.

Először is, feltehetjük, hogy φ normája 1, azaz egy állapot. Tekintsük $\mathscr{A}$ képét az ω univerzális reprezentációja szerint. A kép második kommutánsa, $\omega(\mathscr{A})'' = \mathscr{M}$ egy Neumann algebra. Ekkor a φ állapot egy vektorállapot $\omega(\mathscr{A})$-n, tehát kiterjeszthető egy $\tilde{\varphi}$ normális állapottá $\mathscr{M}$-en, lásd például III.5.2.6 Proposition-t az [5] cikkben. Mivel a normális állapotok gyengén/erősen folytonosak $\mathscr{M}$ egységgömbjén (lásd például III.2.1.4 Theorem-et az [5] cikkben), a Kaplansky sűrűségi tétel alapján (valamint a korlátos folytonos függvények erős folytonosságát felhasználva, lásd például 4.3.2. Theorem-et a [17] cikkben) tudjuk, hogy $\tilde{\varphi}$ kielégíti a (13) egyenlőtlenséget $\mathscr{M}$ pozitív definit kúpján. Ebből következik, hogy elég abban az esetben bizonyítanunk az állításunkat, amikor $\mathscr{A}$ egy Neumann algebra, és a φ pozitív lineáris funkcionálunk normális.

Emlékeztetünk arra, hogy a [20] cikkben szereplő Lemma 2 azt mondja ki, hogy egy Neumann algebra normális pozitív lineáris funkcionálja akkor (és csak akkor) trace-szerű, ha azonos értéket vesz fel egymásra merőleges ekvivalens vetítéseken.

Legyen $P, Q \in \mathscr{A}$ két egymásra merőleges ekvivalens vetítés. Mint a [15] cikkben található Theorem 7 bizonyításában, válasszunk egy $V \in \mathscr{A}$ parciális izometriát, amire $VV^* = P, V^*V = Q$, és tekintsük a

$$\Phi : \begin{bmatrix} u & v & 0 \\ z & w & 0 \\ 0 & 0 & w' \end{bmatrix} \mapsto uP + vV + zV^* + wQ + w'(I - (P+Q))$$

leképezést $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \subset M_3(\mathbb{C})$-ből $\mathscr{A}$-ba. Könnyű látni, hogy Φ injektív egységelemtartó *-algebra homomorfizmus, amely indukál egy

$$X \mapsto \varphi(\Phi(X \oplus 0))$$

pozitív lineáris funkcionált $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$-n, ami kielégíti a (13) egyenlőtlenséget $M_2(\mathbb{C})^{++}$-on. Azt kell bebizonyítanunk, hogy ez azonos értéket vesz fel az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ és a } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elemeken, amit azzal bizonyítunk, hogy igazoljuk az állítást az $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ mátrixalgebrára.

A $p > 0$ eset bizonyítását [11] tartalmazza. Itt a $p = 0$ esettel foglalkozunk (ami jelentősen komplikáltabb, mint a $p > 0$ eset). Tegyük fel hogy az $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$-n értelmezett φ pozitív lieáris funkcionál kielégíti a

$$\varphi(\exp((\log A + \log B)/2)) \leq \varphi((A+B)/2)$$

egyenlőtlenséget minden pozitív definit A és B mátrixra. Ekkor A és B felírható $A = e^C$ és $B = e^D$ alakban valamiyen $C, D \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ önadjungáltra. Ha veszünk egy $r \in \mathbb{R}$ valós számot, és e^C helyett $e^{(C+2rI)}$-t írunk, majd átrendezzük az egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$0 \leq e^{2r}\frac{\varphi\left(e^C\right)}{2} - e^r\varphi\left(e^{\frac{C+D}{2}}\right) + \frac{\varphi\left(e^D\right)}{2}.$$

Mint azt láthatjuk, ez e^r egy másodfokú polinomja, tehát a diszkrimináns nempozitív, ami azt jelenti, hogy

$$\left(\varphi\left(e^{\frac{C+D}{2}}\right)\right)^2 \leq \varphi\left(e^C\right)\varphi\left(e^D\right). \tag{14}$$

Legyen $t \in [0,1]$, és válasszunk

$$x = \begin{bmatrix} \sqrt{1-t} \\ \sqrt{t} \end{bmatrix}$$

és

$$y = \begin{bmatrix} \sqrt{t} \\ \sqrt{1-t} \end{bmatrix}$$

egységvektorokat. Rögzítsük a $P = x \otimes x$ és $Q = y \otimes y$ vetítéseket, és legyen $C = c_1 Q + c_2(I - Q)$ valamilyen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ valós számra, és $D_n = -n(I - P)$. A (3) határérték formulából levezethető, hogy

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{C+D_n}{2}} = e^{\frac{\mathrm{Tr}\, PC}{2}} P.$$

Ebből következik, hogy ha (14) mindkét oldalán határértékét veszünk, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{\mathrm{Tr}\, PC}\varphi(P)^2 \leq \varphi\left(e^C\right)\varphi(P).$$

Mivel φ egy pozitív lineáris funkcionál $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$-n, létezik egy olyan $T \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$, amire $\varphi(X) = \mathrm{Tr}(XT)$, $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy T diagonális, és a legnagyobb sajátértéke 1, a másik pedig valamilyen $\alpha \leq 1$, azaz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}. \tag{15}$$

A célunk az, hogy bebizonyítsuk, $\alpha = 1$. Mivel

$$\mathrm{Tr}\, PC = c_1 \,\mathrm{Tr}\, PQ + c_2(1 - \mathrm{Tr}\, PQ) = (c_1 - c_2)4t(1-t) + c_2,$$

tudjuk, hogy

$$e^{(c_1-c_2)4t(1-t)+c_2}\varphi(P) \leq (e^{c_1} - e^{c_2})\varphi(Q) + e^{c_2}\varphi(I).$$

Ha leosztunk e^{c_2}-vel, és rögzítjük $c = c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$-t, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{c4t(1-t)}\varphi(P) \leq (e^c - 1)\varphi(Q) + \varphi(I).$$

Ebből következik, hogy

$$e^{c4t(1-t)}(1 - t + \alpha t) \leq (e^c - 1)(t + \alpha(1-t)) + (1 + \alpha).$$

Ha átrendezzük ezt az egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{c4t(1-t)}(1-t) + (1-e^c)t - 1 \leq \alpha(1 - e^{c4t(1-t)}t - (1-e^c)(1-t)).$$

Bevezetjük a következő segédfüggvényeket:

$$f(t,c) = (1 - e^c - e^{c4t(1-t)})t + e^{c4t(1-t)} - 1,$$
$$g(t,c) = (1 - e^c - e^{c4t(1-t)})t + e^c.$$

Ezek értelmezve vannak minden $t \in [0,1]$-re és $c \in \mathbb{R}$-re. Azt kell bizonyítanunk, hogy ha valamilyen $\alpha \in [0,1]$ teljesíti az $f \le \alpha g$ egyenlőtlenséget, akkor $\alpha = 1$.

Hogy ezt igazoljuk, először is vegyük észre, hogy f felvesz pozitív értékeket (például $f(1/4,2) > 0$), tehát α pozitív. Ennek a következménye, hogy elég megmutatnunk, hogy az f/g függvény tetszőlegesen megközelíti az 1-et úgy, hogy közben g pozitív.

Ehhez a $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt fogunk vizsgálni, melyet a következőképp definiálunk:

$$\begin{aligned}
q(t) &= \frac{f\left(t, -\frac{\log(1-4t(1-t))}{4t(1-t)}\right)}{g\left(t, -\frac{\log(1-4t(1-t))}{4t(1-t)}\right)} \\
&= \frac{\left(1 - (1-4t(1-t))^{\frac{-1}{4t(1-t)}} - (1-4t(1-t))^{-1}\right)t + (1-4t(1-t))^{-1} - 1}{\left(1 - (1-4t(1-t))^{\frac{-1}{4t(1-t)}} - (1-4t(1-t))^{-1}\right)t + (1-4t(1-t))^{\frac{-1}{4t(1-t)}}}.
\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $q(t) \to 1$, amint $t \nearrow 1/2$. Hajtsunk végre egy változócserét. Tetszőleges $0 \le t < 1/2$ esetén legyen $s = 1 - 4t(1-t)$, ami végigfut a $]0,1]$ intervallumon, valamint $t = (1 - \sqrt{s}/2)$. Ennek a segítségével bevezetünk egy új $\tilde{q} : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$\tilde{q}(s) = q\left(\frac{1-\sqrt{s}}{2}\right) = \frac{-1 - s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} + \sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)}{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1} + \sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)}.$$

Ebből a felírásból látszik, hogy ha $s \searrow 0$, akkor a nevező, ami g új paraméterezésének kétszerese, pozitív. Bebizonyítjuk, hogy $\tilde{q}(s) - 1 \to 0$ ha $s \searrow 0$. Láthatjuk, hogy

$$\tilde{q}(s) - 1 = \frac{-2(1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1})}{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1} + \sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)}, \quad s \in [0,1].$$

Mivel a nevező első kifejezése a számláló konstansszorosa, csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{\sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)} \to 0, \quad \text{ahogy} \quad s \searrow 0.$$

Bármely $s \in]0,1]$-re

$$0 \le \frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{\sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)} \le \frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{\sqrt{s}(2s^{-1} - 1)} = \frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{2s^{-\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}}}.$$

Mivel a nevező a végtelenbe tart, a határérték vételekor eltekinthetünk az 1-estől a számlálóban. Ezután bővítjük a törtet s-sel, és a következőt kapjuk:

$$\frac{s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{2s^{-\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}}} = \frac{s^{\frac{-s}{1-s}} - 1}{2s^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{3}{2}}}.$$

A nevező nullához tart, és felhasználva a $s\log(s) \to 0$ határértéket, láthatjuk, hogy a számláló is a nullához tart. Alkalmazzuk a L'Hospital szabályt:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\searrow 0} \frac{s^{\frac{-s}{1-s}}-1}{2s^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{s\searrow 0} \frac{-s^{\frac{-s}{1-s}}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{(1-s)^2}\log(s)\right)}{\frac{1}{2}(2s^{-\frac{1}{2}}-3s^{\frac{1}{2}})} \\
&= \lim_{s\searrow 0} -2\frac{s^{\frac{-s}{1-s}}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{(1-s)^2}\log(s)\right)}{2s^{-\frac{1}{2}}-3s^{\frac{1}{2}}} = \lim_{s\searrow 0} -2\frac{s^{\frac{-s}{1-s}}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{(1-s)^2}\log(s)\right)}{s^{-\frac{1}{2}}(2-3s)} \\
&= \lim_{s\searrow 0} -2s^{\frac{-s}{1-s}+\frac{1}{2}}\frac{1-s+\log(s)}{2(1-s)^2-3s(1-s)^2} = \lim_{s\searrow 0} -2\frac{s^{\frac{1-3s}{2(1-s)}}-s^{\frac{3-5s}{2(1-s)}}+s^{\frac{1-3s}{2(1-s)}}\log(s)}{2(1-s)^2-3s(1-s)^2}.
\end{aligned}$$

A számláló első két kifejezésének határértéke 0, míg a nevezőé 2, tehát csak a számláló utolsó tagját kell vizsgálnunk. Ha $s>0$ elég kicsi, akkor

$$0 \ge s^{\frac{1-3s}{2(1-s)}}\log(s) \ge s^{\frac{1}{3}}\log(s) \to 0.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{s\searrow 0} \tilde{q}(s) - 1 = 0.$$

Ebből már következik, hogy $\alpha = 1$, és ezzel az állítás $p=0$ részének bizonyítása teljes. ■

Megfigyelhetjük, hogy a $p=0$ esetből következik, hogy ha egy φ pozitív lineáris funkcionál "konvexszé teszi" az exponenciális függvényt olyan értelemben, hogy $\varphi \circ \exp$ konvex $\mathscr{A}^{++}$-on, akkor φ szükségképpen trace-szerű. Tehát az exponenciális függvény annyira nem operátor konvex, hogy csak egyféle lineáris funkcionál létezik, amely "konvexszé teszi".

5. Egy trace karakterizáció a Stein-divergencia segítségével

Fentebb bizonyos távolság mértékeket vizsgáltunk. A mátrixalgebrák környezetében mindegyiket a számtani közép és egyfajta geometriai közép különbségéből vett trace négyzetgyöke definiálta. Bizonyos esetekben tudjuk, hogy ezek valójában igazi metrikák C^*-algebrák általános kontextusában, más esetkeben tudjuk, hogy nem, illetve több esetben csak sejtjük, hogy azok-e.

Ismeretes, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$ pozitív definit mátrixnak a szimmetrikus Stein-divergenciáját a

$$S(A,B) = \log\det\left(\frac{A+B}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\det(AB)$$

kifejezés definiálja. Valójában ez az úgy nevezett Jensen-Shannon szimmetrizációja annak a divergenciának, amit Stein veszteségnek (Stein's loss) nevezünk (lásd a [19] első két fejezetét). A [7] cikk szerzői azt állították, hogy

$$\delta_S(A,B) = \sqrt{S(A,B)}, \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$$

nem valódi metrika, míg [6] szerzői az ellenkezőjét sejtették. A problémát az utóbbinak egyik szerzője, Sra oldotta meg. Nevezetesen, a [19] cikkben Theorem 5 azt mondja ki, hogy δ_S valódi metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$-on, továbbá δ_S számos érdekes tulajdonságáról szóló eredmény szerepelt a munkában.

Vegyük észre, hogy mivel $\mathrm{Tr}\circ\log$ megegyezik $\log\circ\det$-tel $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$-on, $S(A,B)$-t átírhatjuk, mint

$$S(A,B) = \mathrm{Tr}\left(\log(A\nabla B) - \log(A\kappa_p B)\right), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}.$$

Ez minden $p \ge 0$ valós számra igaz. Ez alapján láthatjuk, hogy a számtani közép és κ_p különbségének Tr szerinti képével ellentétben (amely valóban függ a p paraméter értékétől), a számtani közép logaritmusának és κ_p logaritmusa különbségéből vett trace nem függ p-től. Az utóbbi négyzetgyöke ráadásul valódi metrika

Egy természetes kérdés, hogy hasonló észrevétel tehető-e a C^*-algebrák általános esetében. Legyen $\mathscr{A}$ tetszőleges C^*-algebra egy τ hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionállal. Ekkor valóban teljesül, hogy bármely p, q nemnegatív valós számokra

$$\tau(\log(A\kappa_p B)) = \tau(\log(A\kappa_q B)), \quad A, B \in \mathscr{A}^{++}. \tag{16}$$

Hogy ezt lássuk, megjegyezzük a következőt. Egya a [12] cikkben szereplő Theorem 2 bizonyításából nyert ötletet alkalmazva a [13] cikkben található Lemma 17 során bebizonyítottuk, hogy tetszőleges Neumann algebrán értelmezett φ korlátos lineáris funkcionál akkor, és csak akkor trace-szerű, ha

$$\varphi(\log(ABA)) = 2\varphi(\log A) + \varphi(\log B) \tag{17}$$

teljesül minden pozitív invertálható A, B-re. (Igazából [13] önadjungált lineáris funkcionálokra bizonyította az eredményt, de ismerve az ilyen funkcionálok karakterizációját, az állítást általános lineáris funkcionálokra is be lehet bizonyítani.)

A [11] cikkben bizonyítást nyert, hogy egy τ hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionállal ellátott $\mathscr{A}$ tekinthető egy Neumann algebra gyengén/erősen sűrű részalgebrájának, amelyre τ normális hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionálként terjed ki. Belátható, hogy ez a kiterjesztés kielégíti a (17) egyenlőséget. Ebből már egyszerűen következik, hogy

$$\tau(\log(A\kappa_p B)) = (1/2)\tau(\log A + \log B) = \tau(\log(A\kappa_q B)), \quad A, B \in \mathscr{A}^{++}.$$

Tehát a

$$\delta_S^\tau(A, B) = \left(\tau\left(\log(A\nabla B) - \log(A\kappa_p B)\right)\right)^{1/2}, \quad A, B \in \mathscr{A}^{++} \tag{18}$$

érték független p-től, azonban nem tudjuk a választ a következő valószínűleg nehéz kérdésre.

3. *Probléma.* Igaz-e, hogy a (18) által definiált δ_S^τ valódi metrika egy általános, τ hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionállal rendelkező C^*-algebra esetében?

Ezzel kapcsolatban megemlítenénk, hogy

$$\tau(\log(A\kappa_p B)) = \tau(\log(A\# B)), \quad A, B \in \mathscr{A}^{++}.$$

Ez is abból következik, hogy (17) teljesül τ-ra. Ezt, és a logaritmus függvény operátor monotonitását felhasználva láthatjuk, hogy $\delta_S^\tau(A, B)$ mindig nemnegatív. A τ hűségességének következménye, hogy pontosan akkor 0, amikor $A = B$, valamint szimmetrikus a két változójában. Tehát δ_S^τ metrikussága csak azon múlik, hogy teljesíti-e a háromszög egyenlőtlenséget. Mint azt korábban említettük, úgy hisszük, hogy ez egy nehéz kérdés, amit alátámaszt a bizonyítás összetettsége mátrix algebrák esetében, lásd [19].

A következő eredménnyel zárjuk a munkánkat, amely a (16) egyenlőséghez kapcsolódik. Azt mutatja, hogy bármely két különböző p, q nemnegatív szám esetében ezen egyenlőségnek teljesülése valójában karakterizálja egy tetszőleges Neumann agebrán értelmezett korlátos lineáris funkcionál trace-szerűségét. Kiemeljük, hogy a 3. tétellel elentétben nem feltételezzük a lineáris funkcionálról, hogy pozitív, ennek azonban az az ára, hogy az eredmény Neumann algebrákról szól, és nem általános C^*-algebrákról.

4. Tétel. *Legyen $\mathscr{A}$ egy Neumann algebra. Tegyük fel, hogy φ korlátos lineáris funkcionál $\mathscr{A}$-n. Legyen p, q két külöböző nemnegatív valós szám. Ekkor*

$$\varphi(\log A\kappa_p B) = \varphi(\log A\kappa_q B), \quad A, B \in \mathscr{A}^{++} \tag{19}$$

akkor, és csak akkor teljesül, ha φ trace-szerű.

Bizonyítás: A fenti diszkusszió miatt csak a szükségességet kell igazolnunk.

Először tegyük fel, hogy $p = 0$ és $q > 0$. Ebben az esetben (19) a következő alakot ölti:

$$\varphi(\log A\kappa_0 B) = \varphi(\log A\kappa_q B).$$

Ha A helyére $A^{4/q}$-t, B helyére pedig $B^{2/q}$-t írunk, akkor láthatjuk, hogy

$$\varphi(2\log A + \log B) = \varphi(\log ABA), \quad A, B \in \mathscr{A}^{++}. \tag{20}$$

Ekkor a [13] cikkben szereplő Lemma 17 alapján teljesül a trace-szerűség. Emlékeztetünk ezen lemmának a bizonyítására. Ebben tetszőleges adott P, Q projekciókra, $I + tP$-t írtunk A, és $I + tQ$-t írtunk B helyére ($t > -1$), és a

$$\log(I + X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n}, \tag{21}$$

hatványsor előállítást használtuk, amely teljesül minden $X \in \mathscr{A}$-ra, amire $\|X\| < 1$. Ezzel a módszerrel (20) egy olyan egyenlőséggé alakult át, melynek mindkét oldalán t egy-egy hatványsora található a nulla egy környezetében. A t^3 tagok együtthatóit vizsgálva kaptuk a

$$\varphi(PQP) = \varphi(QPQ)$$

egyenlőséget. Végül, a [3] cikkben található Lemma 1 bizonyításából alkalmazva egy ötletet, levezettük, hogy ha ez az egyenlőség teljesül minden $P, Q \in \mathscr{A}$ projekcióra, akkor φ trace-szerű.

Jelen állításunkhoz visszatérve tegyük fel, hogy $0 < p < q$. Egy hasonló érvelést fogunk használni, ami viszont ebben az esetben technikai szempontból jóval összetettebb lesz. A (19) egyenlőségbe helyettesítsük A-t és B-t $A^{p/4}$-nel és $B^{q/2}$-nel, valamint hozzuk ki a gyököket a logaritmus alól, hogy a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{q}\varphi\left(\log(ABA)\right) = \frac{1}{p}\varphi\left(\log\left(A^{\frac{q}{p}} B^{\frac{q}{p}} A^{\frac{q}{q}}\right)\right).$$

Ebből láthatjuk, hogy ha q-t írunk q/p helyére, akkor (19) ekvivalens a következővel:

$$\varphi\left(\log(ABA)\right) = \frac{1}{q}\varphi\left(\log\left(A^q B^q A^q\right)\right), \quad A, B \in \mathscr{A}^{++}. \tag{22}$$

Legyen P és Q két vetítés, valamint $A = I + tP$ és $B = I + tQ$ tetszőleges $t > -1$ valós számra. Hatványsor előállítás segítségével a következő egyenlőségekre jutunk:

$$\frac{1}{q}\varphi\left(\log\left(A^q B^q A^q\right)\right) = \frac{1}{q}\varphi\left(\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \upsilon_n t^n\right)\right) = \frac{1}{q}\varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \Upsilon_n t^n\right)$$

és

$$\varphi\left(\log(ABA)\right) = \varphi\left(\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n t^n\right)\right) = \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n t^n\right).$$

Az $\upsilon_n, \Upsilon_n, \omega_n, \Omega_n$ együtthatók $\mathscr{A}$ elemei. Mivel a két hatványsor azonos függvényt definiál a $t = 0$ egy környezetében, az együtthatóknak meg kell egyeznie. Speciálisan,

$$\varphi\left(\Omega_3 - \frac{\Upsilon_3}{q}\right) = 0. \tag{23}$$

Megmutatjuk, hogy ebből következik $\varphi(PQP) = \varphi(QPQ)$. Ahogy már korábban említettük, ha ez a egyenlőség teljesül minden $P, Q \in \mathscr{A}$ projekcióra, akkor φ trace-szerű.

Az $(1+t)^q$ hatványsorát alkalmazva megkapjuk a következőt:

$$\begin{aligned}
A^q B^q A^q &= (I+((1+t)^q-1)P)(I+((1+t)^q-1)Q)(I+((1+t)^q-1)P)\\
&= \left(I+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{q}{i}t^iP\right)\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{k}t^kQ\right)\left(I+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{q}{j}t^jP\right)\\
&= \log(I+\sum_{n=1}^{\infty}v_nt^n),
\end{aligned}$$

valamint (21)-ből következik, hogy

$$\log(I+\sum_{n=1}^{\infty}v_nt^n) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_nt^n\right)^m}{m}.$$

Ebből könnyű látni, hogy

$$\Upsilon_3 = v_3 - \frac{v_1v_2+v_2v_1}{2}+\frac{v_1^3}{3}, \tag{24}$$

ezért csak a v_1, v_2 és v_3 együtthatókat kell tekintenünk. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$v_1 = q(2P+Q),$$

és

$$\begin{aligned}
v_2 =& \frac{q(q-1)}{2}2P+q^2P+q^2(PQ+QP)+\frac{q(q-1)}{2}Q\\
=&(q^2-q)P+q^2P+q^2(PQ+QP)+\frac{q^2-q}{2}Q\\
=&q^2\left(PQ+QP+2P+\frac{1}{2}Q\right)-q\left(P+\frac{1}{2}Q\right)\\
=&\frac{1}{2}q^2(2P+Q)^2-\frac{1}{2}q(2P+Q).
\end{aligned}$$

Ami v_3-at illeti,

$$\begin{aligned}
v_3 =& \frac{q(q-1)(q-2)}{6}2P+\frac{q^2(q-1)}{2}2P+\frac{q^2(q-1)}{2}(PQ+QP)\\
&+q^3PQP+\frac{q^2(q-1)}{2}(PQ+QP)+\frac{q(q-1)(q-2)}{6}Q\\
=&\frac{q^3-3q^2+2q}{3}P+(q^3-q^2)P+\frac{q^3-q^2}{2}(PQ+QP)+q^3PQP\\
&+\frac{q^3-q^2}{2}(PQ+QP)+\frac{q^3-3q^2+2q}{6}Q\\
=&q^3\left(PQP+PQ+QP+\frac{4}{3}P+\frac{1}{6}Q\right)\\
&-q^2\left(PQ+QP+2P+\frac{1}{2}Q\right)+q\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}Q\right).
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
v_1v_2+v_2v_1 =& \frac{1}{2}q^3\left((2P+Q)(2P+Q)^2+(2P+Q)^2(2P+Q)\right)\\
&-\frac{1}{2}q^2\left((2P+Q)(2P+Q)+(2P+Q)(2P+Q)\right)\\
=&q^3(4PQP+2QPQ+6(PQ+QP)+8P+Q)\\
&-q^2(2(PQ+QP)+4P+Q)
\end{aligned}$$

és

$$v_1^3 = q^3(2P+Q)^3 = q^3(4PQP+2QPQ+6(PQ+QP)+8P+Q).$$

Ezek segítségével (24) alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned}\Upsilon_3 =& v_3 - \frac{v_1v_2+v_2v_1}{2} + \frac{v_1^3}{3} = q^3\bigg(PQP+PQ+QP+\frac{4}{3}P+\frac{1}{6}Q-2PQP-QPQ \\ &-3(PQ+QP)-4P-\frac{1}{2}Q+\frac{4}{3}PQP+\frac{2}{3}QPQ+2(PQ+QP)+\frac{8}{3}P+\frac{1}{3}Q\bigg) \\ &+q^2\left(PQ+QP+2P+\frac{1}{2}Q-(PQ+QP)-2P-\frac{1}{2}Q\right)+q\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}Q\right) \\ =& q^3\left(\frac{1}{3}PQP-\frac{1}{3}QPQ\right)+q\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}Q\right).\end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy Ω_3 megegyezik Υ_3-mal, ha $q=1$, tehát

$$\Omega_3 = \frac{1}{3}PQP - \frac{1}{3}QPQ + \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q.$$

Ezek segítségevel láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Omega_3 - \frac{\Upsilon_3}{q} =& \left(\frac{1}{3}PQP-\frac{1}{3}QPQ+\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}Q\right)-\left(\frac{2}{3}+P\frac{1}{3}Q\right)-q^2\left(\frac{1}{3}PQP-\frac{1}{3}QPQ+\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}Q\right) \\ =& (1-q^2)\left(\frac{1}{3}PQP-\frac{1}{3}QPQ\right).\end{aligned}$$

Ezek tudatában, (23) alapján

$$\varphi\left(\frac{1}{3}PQP-\frac{1}{3}QPQ\right)=0,$$

amiből már látszik, hogy $\varphi(PQP) = \varphi(QPQ)$ bármely $P, Q \in \mathscr{A}$ vetítésre. Ahogy korábban már említettük, ebből következik, hogy φ trace-szerű. Ezzel az állításunk bizonyítása teljes. ■

6. A TÁRGYALT EREDMÉNYEK KONKLÚZIÓJA

Munkánkat az eredmények összefoglalásával zárjuk. Először azt tanulmányoztuk, hogy C^*-algebrákon fennáll-e valamilyen egyenlőtlenség a számtani közép és az általunk definiált κ_p operációk között (nemnegatív-e a számtani közép és κ_p különbsége), amely triviálisan biztosítaná d_p^τ jóldefiniáltságát. Az 1. állítás következtében láttuk azonban, hogy ez csak speciális esetekben, kommutatív algebrákban fordul elő. Ezt követően utaltunk a [11] cikkre, ahol a szerző megmutatja, hogy d_p jóldefiniált $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$-on minden $p \geq 0$ esetén, valamint d_p^τ is jóldefiniált tetszőleges általános C^*-algebra pozitív kúpján, ha $p \leq 2$. (A $p > 2$ eset kifejezetten nehéznek mutatkozik.) Ezek után d_p metrikusságát vizsgáltuk. A 2. állításban megmutattuk, hogy d_p pontosan akkor valódi metrika egy Hilbert-tér egyrangú projekcióinak $P_1(H)$ halmazán , ha $p \leq 2$. Ebből következik, hogy tetszőleges $p > 2$ esetén d_p nem metrika már a 2×2-es mátrixok algebráján sem. A kérdés, hogy d_p^τ valódi metrika-e ezekben az esetekben, azonban meglehetősen nehéz problémának tűnik, aminek vizsgálata indokolt, további kutatás tárgyát képezi. A 3. tételben megmutattuk, hogy ha lehet olyan φ korlátos lineáris funkcionál egy $\mathscr{A}$ Neumann algebrán, melyre d_p^φ jóldefiniált, az csak trace-szerű lehet. Megjegyezzük hogy ennek eredménynek és az 1. állításnak a $p = 0$ esetei is azt mutatják, hogy mennyire nem operátor konvex az exponenciális függvény. A szimmetrikus Stein-divergencia formulája által motiválva vizsgáltuk a számtani közép logaritmusának és valamely κ_p logaritmusa külöbségének képét egy hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionál szerint tetszőleges C^*-algebra pozitív definit kúpján. Természetesen merül fel a kérdés, hogy egybeesnek-e ezek a függvények, az $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$ esethez hasonlóan. Az utolsó eredményünk azt mutatja, hogy ez pontosan akkor történik meg egy Neumann algebra korlátos lineáris funkcionálja esetében, ha az trace-szerű. Megjegyezzük, hogy hasonló eredmény bizonyítható egy C^*-algebra és egy pozitív lineáris funkcionál esetén is. A kérdés, hogy az utóbbi kontextusban δ_S^{τ} négyzetgyöke valódi metrika-e, ugyancsak mély probléma, a jövőben szeretnénk ezzel is foglalkozni.

HIVATKOZÁSOK

[1] H. Araki, *On an inequality of Lieb and Thirring,* Lett. Math. Phys. **19** (1990), 167-170.

[2] R. Bhatia, S. Gaubert and T. Jain, *Matrix versions of the Hellinger distance,* Lett. Math. Phys. **109** (2019), 1777-1804.

[3] A.M. Bikchentaev, *On a property of L_p-spaces on semifinite von Neumann algebras,* Math. Notes **64** (1998), 159-163.

[4] A.M. Bikchentaev, *The Peierls-Bogoliubov inequality in C^*-algebras and characterization of tracial functionals,* Lobachevskii J. Math. **32** (2011), 175-179.

[5] B. Blackadar, *Operator algebras. Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras,* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 122. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III. Springer-Verlag, Berlin, 2006. xx+517 pp.

[6] Z. Chebbi and M. Moahker, *Means of hermitian positive-definite matrices based on the log-determinant α-divergence function,* Linear Algebra Appl. **436** (2012), 1872-1889.

[7] A. Cherian, S. Sra, A. Banerjee, and N. Papanikolopoulos, *Efficient similarity search for covariance matrices via the Jensen-Bregman LogDet divergence,* In International Conference on Computer Vision (ICCV), Nov. 2011.

[8] T.H. Dinh, C.T. Le, B.K. Vo, T.D Vuong, *The $\alpha - z$-Bures Wasserstein divergence,* Linear Algebra Appl. **624** (2021), 267-280.

[9] L.T. Gardner, *An inequality characterizes the trace,* Canadian J. Math. **31** (1979), 1322-1328.

[10] F. Hiai and D. Petz, *Introduction to matrix analysis and applications,* Universitext. Springer, Cham; Hindustan Book Agency, New Delhi, 2014. viii+332 pp.

[11] Á. Komálovics and L. Molnár, *On the difference of the arithmetic mean and a sort of geometric mean and on related distance measures,* submitted to J. Math. Anal. Appl.

[12] L. Molnár, *A remark to the Kochen-Specker theorem and some characterizations of the determinant on sets of Hermitian matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006) 2839-2848.

[13] L. Molnár, *General Mazur-Ulam type theorems and some applications,* in Operator Semigroups Meet Complex Analysis, Harmonic Analysis and Mathematical Physics, W. Arendt, R. Chill, Y. Tomilov (Eds.), Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 250, pp. 311–342, Birkhäuser, 2015.

[14] L. Molnár, *Quantum Rényi relative entropies: their symmetries and their essential difference,* J. Funct. Anal. **277** (2019), 3098-3130.

[15] L. Molnár, *On dissimilarities of the conventional and Kubo-Ando power means in operator algebras,* J. Math. Anal. Appl. **504** (2021) 125356.

[16] L. Molnár, *On certain order properties of non Kubo-Ando means in operator algebras,* Integral Equations Operator Theory **94** Article number: 25 (2022).

[17] G. Murphy, *C^*-algebras and operator theory,* Academic Press, Boston, 1990.

[18] D. Spehner, F. Illuminati, M. Orszag and W. Roga, *Geometric Measures of Quantum Correlations with Bures and Hellinger Distances,* In: Fanchini, F., Soares Pinto, D., Adesso, G. (eds) Lectures on General Quantum Correlations and their Applications. Quantum Science and Technology. Springer, Cham, 2017.

[19] S. Sra, *Positive definite matrices and the S-divergence,* Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 2787-2797.

[20] O.E. Tikhonov, *Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals,* Positivity **9** (2005), 259-264.