VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (1)

Többes integrálok

oktatási segédanyag

A Villamosmosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott
előadásai alapján összeállította:

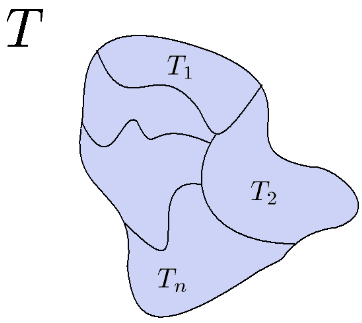
Fritz Józsefné

Kónya Ilona

2007. december

szerkesztette: Máday Péter

1. Kétváltozós függvény kettősintegrálja $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományon



$T \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető (van területe),
$f : T \mapsto \mathbb{R}$ korlátos

$\underbrace{\text{T felbontása}}_{P}$: $\bigcup_{k=1}^{n} T_k$, $\quad T_k$ Jordan-mérhető, $\quad \text{int } T_k \cap \text{int } T_j = \emptyset$, $\quad$ ha $k \neq j$

$$m_k = \inf_{(x,y)\in T_k} f(x,y), \quad s_p = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (\text{ter } T_k)$$

$$M_k = \sup_{(x,y)\in T_k} f(x,y), \quad S_p = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (\text{ter } T_k)$$

① $\quad s_p \le S_p$ $\qquad$ ② $\quad s_{P_1} \le S_{P_2} \qquad \Rightarrow h \le H$

$h \underset{def}{=} \sup_P \{s_P\}$ $\qquad$ $H \underset{def}{=} \inf_P \{S_P\}$

(h, H ∃Dedekind tétel alapján)

Def. *Az f korlátos függvénynek létezik a kettősintegrálja a T Jordan-mérhető tartományon, ha* $h = H$

Jelölés. $h = H = \iint\limits_T f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Oszcillációs összeg : $\quad o_p = S_p - s_p$

$\underbrace{\text{Integrálközelítő összeg}}_{\text{Riemann-összeg}}$: $\quad \sigma_p = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \text{ter } T_k$, $\qquad (\xi_k, \eta_k) \in T_k$

Def. *P felbontás finomsága :* $\quad \Delta P = \max_k (T_k \text{ átmérője})$

Def. T_k *átmérője* $= \max_{\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in T_k} \|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|$

Def. $P_1, P_2, \dots$ *minden határon túl finomodó felosztássorozat (m.h.t.f.f.s), ha* $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$

Szükséges, és elégséges feltételek a többes integrál létezésére:

Tétel. *A T Jordan-mérhető tartományon korlátos f akkor, és csak akkor Riemann-integrálható itt, ha van olyan m.h.t.f.f.s.* (P_n), *hogy*

$$\lim_{\Delta P_n \to 0} s_{P_n} = \lim_{\Delta P_n \to 0} S_{P_n}$$

Tétel. *f akkor, és csak akkor Riemann-integrálható a T-n, ha*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists P \text{ felbontás, hogy} \quad o_p < \varepsilon$$

Tétel. *f akkor, és csak akkor Riemann-integrálható a T-n, ha*

$$\exists P_n \quad m.h.t.f.f.s, \text{ hogy} \quad \exists \lim_{n\to 0} \sigma_{P_n} = \mathrm{I}$$

a (ξ_k, η_k) *reprezentációs pontok megválasztásától függetlenül, ahol I az integrál értéke.*

Elégséges feltétel a többes integrál létezésére

Tétel. *Ha T Jordan-mérhető, és f folytonos a T halmazon, akkor létezik f-nek többes integrálja*

1.1. A többesintegrálok tulajdonságai

$$\underset{korl.,folyt.}{f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}} \quad , \qquad \underset{\text{Jordan-mérhető}}{V \subset \mathbb{R}^n} \qquad (\Rightarrow \exists f \text{ többesintegrálja a V-on})\,.$$

1. Tulajdonság. *Ha f, g folytonosak a T Jordan-mérhető halmazon, akkor:*

$$\int_V f + g = \int_V f + \int_V g \qquad (additivitás).$$

$$\int_V cf = c\int_V f \qquad (homogenitás).$$

$\Longrightarrow$ *a többesintegrál homogén lineáris funkcionál.*

2. Tulajdonság.

$$Ha\ f \geq 0 \quad \Rightarrow \int_V f \geq 0 \qquad (nem\ negatív).$$

$$Ha\ f \geq g \quad \Rightarrow \int_V f \geq \int_V g \qquad (monoton).$$

3. Tulajdonság.

$$\left|\int_V f\right| \leq \left|\int_V |f|\right|$$

4. Tulajdonság.

$$\int_{V_1 \cup V_2} f = \int_{V_1} f + \int_{V_2} f \qquad \begin{pmatrix} tartományra \\ vonatkozó \\ additivitás \end{pmatrix}.$$

ahol V_1*, és* V_2 *Jordan-mérhető, és*

$$\mathrm{Int}V_1 \cap \mathrm{Int}V_2 = \emptyset$$

azaz az egyes tartományok belsejei diszjunktak.

5. Tulajdonság.

$$\kappa = \frac{\int_V f}{m(V)} \quad , \qquad k \leq \kappa \leq K, \quad ahol \quad k = \inf_V f, \quad K = \sup_V f$$

m(V) a V tartomány n-dimenziós Jordan mértéke (n=1-re hosszúság, n=2-re terület, n=3-ra térfogat stb.)

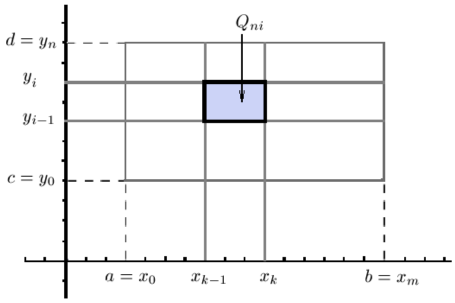
1.2. Kétszeres integrál

Tétel. *Ha f Riemann-integrálható* Q=[a,b]×[c,d] *-n és* $\forall$ *rögzített* $y \in [c,d]$*-re* $\exists \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \varphi(y)$, *akkor*

$$\underbrace{\iint\limits_Q f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\textit{kettős integrál}} = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \underbrace{\int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\textit{kétszeres integrál}}$$

Megjegyzés. *Ha f folytonos, akkor biztosan igaz a tétel (léteznek az integrálok, és a kettős integrál megegyezik a kétszeres integrállal).*

Biz. *Be kell látni, hogy* $\exists \int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y$ *és megegyezik a kettős integrállal.*



$$\begin{aligned} \sigma^{\varphi} &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(\eta_i)\cdot\Delta y_i = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f(x,\eta_i)\mathrm{d}x \cdot \Delta y_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x,\eta_i)\mathrm{d}x \right] \Delta y_i \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \sup_{Q_{ki}} \{f(x,y)\}\cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_i = S_F^f \end{aligned}$$

Hasonlóan alulról is megbecsülhető.

$$s_F^f \le \sigma^{\varphi} \le S_F^f \qquad m.h.t.f.f.s. : n \to \infty, \quad m \to \infty$$

$\Longrightarrow \sigma^{\varphi}$ *konvergens és* $\to \iint\limits_Q f\ \mathrm{d}Q$

Hasonlóan látható:

Tétel. *Ha f Riemann-integrálható Q-n és* $\forall$ *rögzített* $x \in [a,b]$*-re* $\exists \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ *, akkor*

$$\iint\limits_Q f(x.y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Következmény. *Ha f folyatonos az* [a,b]×[c,d] *tartományon, akkor*

$$\iint\limits_Q f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Tétel. *Ha f Riemann-integrálható Q-n (pl. folytonos) és $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, akkor*

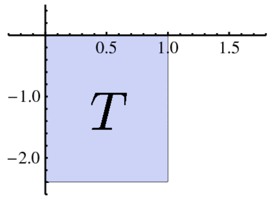
$$\mathcal{I} = \iint\limits_{Q} f(x,y) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \left[\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \right] \cdot \left[\int_c^d h(y) \, \mathrm{d}y \right]$$

Biz.

$$\mathcal{I} = \int_a^b \int_c^d g(x) h(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y) \, \mathrm{d}y$$

Példa. $\mathcal{I} = \iint\limits_T xy\, e^{2x+y^2}\ \mathrm{d}T = ?$

$T: 0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 0$



$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \underbrace{\left(\int_0^1 x\, e^{2\,x}\, \mathrm{d}x\right)}_{\mathcal{I}_1} \cdot \underbrace{\left(\int_{-2}^0 y\, e^{y^2}\, \mathrm{d}y\right)}_{\mathcal{I}_2} \\
\mathcal{I}_1 &= \int_0^1 x\, e^{2\,x}\, \mathrm{d}x = x\ \frac{e^{2x}}{2}\bigg|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\, \mathrm{d}x}_{\frac{e^{2x}}{4}\big|_0^1} = \frac{1}{2}\, e^2 - \frac{1}{4}\, e^2 = \frac{e^2}{4} \\
\mathcal{I}_2 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^0 2y\, e^{y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\, e^{y^2}\bigg|_{-2}^0 = \frac{1}{2}\ \left(1 - e^4\right) \\
\mathcal{I} &= \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 = \frac{e^2(1-e^4)}{8}
\end{aligned}$$

Példa. $\iint\limits_T y\ \cos 2xy\ \mathrm{d}T = ? \qquad T:\quad 1 \le x \le 2\,;\quad 1 \le y \le 3$

Néha még ilyen egyszerű tartománynál sem mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk.

$$\int_1^2 \int_1^3 y\ \cos 2xy\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \quad : \qquad \textit{y szerint parciális integrálás}$$

Próbáljuk meg a másik kétszeres integrált!

$$\int_1^3 \int_1^2 y\ \cos 2xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^3 \sin 2\,xy\big|_{x=1}^{x=2}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^3 (\sin 4y - \sin 2y)\ \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 4y}{4} + \frac{\cos 2y}{2}\right)\bigg|_{y=1}^3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 12}{4} + \frac{\cos 6}{2} + \frac{\cos 4}{4} - \frac{\cos 2}{2}\right)$$

Példa. $\iint\limits_T 3x\, e^{-x\,y}\ \mathrm{d}T = ? \qquad T:\quad 0 \le x \le 1\,;\quad 1 \le y \le 2$

$$\int_1^2 \int_0^1 3x\, e^{-x\ ,y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad : \qquad \textit{így parciális integrálás lenne.}$$

Most is próbálkozzunk a másik kétszeres integrállal!

$$3\cdot(-1)\int_0^1 \int_1^2 -x\, e^{-x\,y}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = -3\int_0^1 e^{-x\,y}\big|_{y=1}^2\ \mathrm{d}x =$$

$$-3\int_0^1 \left(e^{-2x} - e^{-x}\right)\ \mathrm{d}x = -3\ \left(\frac{e^{-2x}}{-2} + e^{-x}\right)\bigg|_{x=0}^1 = -3\left(-\frac{1}{2}\, e^{-2} + e^{-1} + \frac{1}{2} - 1\right)$$

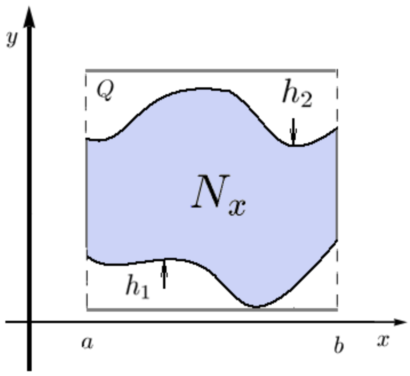
1.3. Integrálás normáltartományon

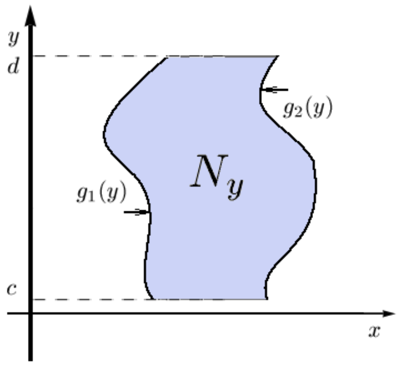
Def. *x tengely felől nézve normáltartomány(1. ábra):*

$$N_x = \left\{ (x,y) \,:\, h_1(x) \le y \le h_2(x)\,; \qquad x \in [a,b]\,; \quad h_1, h_2 \in C^0_{[a,b]} \right\}$$

Def. *y tengely felől nézve normáltartomány:*

$$N_y = \left\{ (x,y) \,:\, g_1(y) \le x \le g_2(y)\,; \qquad y \in [c,d]\,; \quad g_1, g_2 \in C^0_{[c,d]} \right\}$$





Tétel. *a.) Ha f folytonos N_x-en:*

$$\iint\limits_{N_x} f(x,y)\;\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

b.) Ha f folytonos N_y-on:

$$\iint\limits_{N_y} f(x,y)\;\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Biz. *a.) esetre:* *N_x-et foglaljuk bele egy Q téglalapba ($N_x \subset Q$)*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & ha(x,y) \in N_x \\ 0, & ha(x,y) \in N_x \end{cases}$$

$$\iint\limits_{N_X} f(x,y)\;\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{Q} f^*(x,y)\;\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f^*(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_c^{h_1(x)} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{h_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x$$

$$= 0 + \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 0$$

Példa. $\iint\limits_T 2\,xy\;\mathrm{d}T = ? \qquad T: y \ge x^2\,; \quad y \le 2-x\,; \quad x \ge 0$

Az $y = x^2$ és $y = 2-x$ görbék metszete $x \ge 0$ félsíkban: $x = 1$-nél van.

$$N_x : \begin{array}{l} x^2 \le y \le 2-x \\ 0 \le x \le 1 \end{array}$$

(Nem N_y, csak két N_y uniója)

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} 2\,xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,y^2\Big|_{y=x^2}^{2-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 4x - 4x^2 + x^3 - x^5\,\mathrm{d}x = 2x^2 - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = 2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

Példa. *Legyen f folytonos kétváltozós függvény.*

a.) *Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá az alábbi kettősintegrált:*

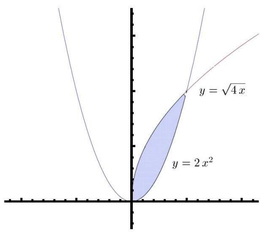
$$\iint_T f(x,y)\ \mathrm{d}T \quad ,$$

Ahol T az $y = \sqrt{4\,x}$, valamint az $y = 2\,x^2$ görbék által határolt tartomány.

b.)

$$\iint_T x + 2y\ \mathrm{d}T = ?$$

a.) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x \\ y = 2\,x^2 \end{array}\right\}\ 4\,x^4 = 4x \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$



$$N_y : \quad \begin{array}{l} \frac{y^2}{4} \le x \le \sqrt{\frac{y}{2}} \\ 0 \le y \le 2 \end{array} \qquad \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$N_x : \quad \begin{array}{l} 2\,x^2 \le y \le \sqrt{4\,x} \\ 0 \le x \le 1 \end{array} \qquad \int_0^1 \int_{2\,x^2}^{\sqrt{4\,x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

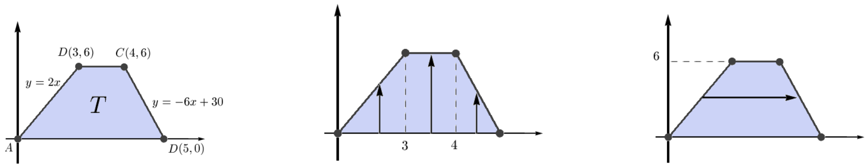
b.) $$\iint_T x + 2y\ \mathrm{d}T = \int_0^1 \int_{2\,x^2}^{\sqrt{4\,x}} x + 2\,y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\,y + y^2\right]_{y=2\,x^2}^{\sqrt{4\,x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{4\,x} + 4x - 2x^3 - 4x^4\right)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\,x^2 - 2\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{3}{2}$$

Példa. $\displaystyle\iint_T e^{6x+y}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

ahol T az A(0,0), B(5,0), C(4,6) és a D(3,6) pontok által meghatároztt trapéz

a.) *Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá a fenti kettős integrált!*



b.) Az egyik segítségével számolja ki a kettős integrál értékét!

a.)

$$N_y \quad : \qquad \int_0^6 \int_{y/2}^{5-y/6} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$N_x \quad : \qquad \int_0^3 \int_0^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \int_0^6 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_4^5 \int_0^{-6x+30} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

b.)

$$\int_0^6 \int_{\frac{y}{2}}^{5-\frac{y}{6}} e^y\, e^{6x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^6 e^y\, \frac{e^{6x}}{6}\bigg|_{x=\frac{y}{2}}^{x=5-\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\int_0^6 e^y \left(e^{30-y} - e^{3y}\right)\,\mathrm{d}y$$

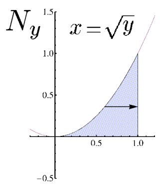
$$= \quad \frac{1}{6}\left(e^30\, y - \frac{e^{4y}}{4}\right)\bigg|_{y=0}^{6}$$

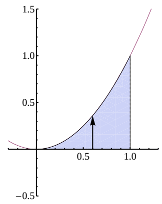
$$= \quad \frac{1}{6}\left(6\, e^{30} - \frac{1}{4}\, e^{24} + \frac{1}{4}\right)$$

Megjegyzés. *Normáltartományok esetén az integrálás sorrendje kötött.(Kívül mindig konstanstól konstansig integrálunk!) A sorrend felcserélése természetesen az integrálási határok átalakításával jár és nem egyszerűen csak az integrálok cseréjével.*

Példa. *Az integrálás sorrendjének felcserélésével határozzuk meg az alábbi integrál értékét!*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (4+x^3)^{1/2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \mathcal{I}$$





$$T\ :\ \begin{array}{c} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 1 \end{array} = N_y = N_x = \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \iint_T (4+x^3)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}T \\
T &: \\
\mathcal{I} &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (4+x^3)^{1/2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (4+x^3)^{1/2}\, y\Big|_0^{x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2(4+x^3)^{1/2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\, \frac{(4+x^3)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{x=0}^{1} \\
&= \frac{2}{9}\left(5^{3/2} - 4^{3/2}\right)
\end{aligned}$$

1.4. Integrálás tetszőleges tartományon

Ha a tartományt fel lehet bontani véges sok normáltartomány uniójára, akkor az egyes normáltartományokra elvégezve az integrálást ezek összegeként kapjuk az eredményt. Bizonyos esetekben próbálkozhatunk új változó bevezetésével, azaz az (x, y) koordináták transzformációjával. Ilyenkor a tartomány is transzformálódik.

2. KETTŐS INTEGRÁL TRANSZFORMÁCIÓJA integrálás helyettesítéssel

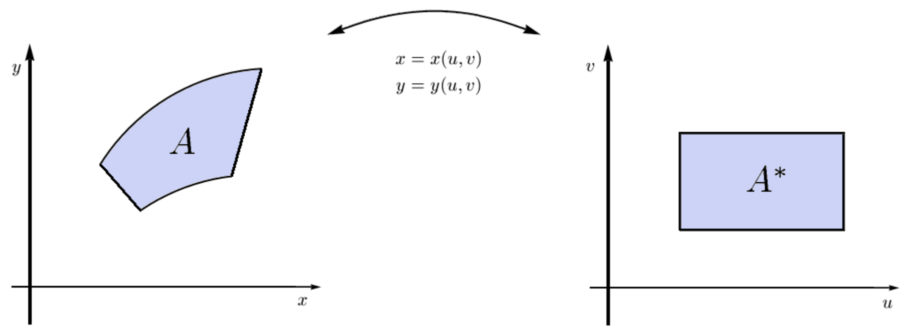
2.1. Az egyváltozós függvény integráljának transzformációja

Legyen $x = x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ folytonosan differenciálható függvény, $\dot{x}(t) > 0$, $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$ továbbá f folytonos egyváltozós függvény, ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

Itt a $[t_1, t_2]$ intervallumot az $x = x(t)$ kölcsönösen egyértelműen képezi le az $[a, b]$ intervallumra. Az új változó bevezetése után az integrandust $\dot{x}(t)$-vel kellett megszorozni.

2.2. A kettősintegrál transzformációja



Tegyük fel, hogy az $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ függvények kölcsönösen egyértelműen képezik le az A^* tartományt az A tartományra (A, A^* normáltartományok), valamint $x(u, v)$, $y(u, v)$ parciális deriváltjai folytonosak.

Tekintsük a Jacobi-féle függvénydeterminánst:

$$J := \det \frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Tétel. *Legyen* $f, x'_u, x'_v, y'_u, y'_v$ *folytonos, és legyen* $|\mathrm{J}| \neq 0$. *Ha az* $x = x(u, v), y = y(u, v)$ *függvényrendszer kölcsönösen egyértelműen képezi* A^**-ot* A*-ra, akkor*

$$\iint\limits_A f(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{A^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\det \frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(u, v)}\right|\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Megjegyzés. *A tett feltevések mellett mindkét oldalon az integrandus folytonos, ezért a szóbanforgó integrálok léteznek.*

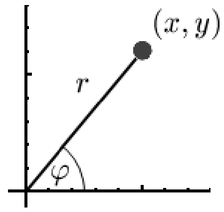
Megjegyzés. *Az új változók* (u, v) *bevezetésével az integrálást az eredeti* A *tartomány helyett az új* A^* *tartományon kell elvégezni, az integrandust a Jacobi-determináns abszolút értékével* $|\mathrm{J}|$ *kell szorozni.*

A továbbiakban néhány fontos transzformációt mutatunk be.

2.3. Polártranszformáció

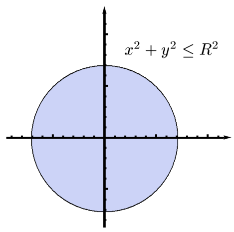
Az origó középpontú kör paraméteres egyenletének felhasználásával lehetőségünk van a φ, r változók bevezetésével az integrálási tartományt egy téglalappá transzformálni.

$x = r\,\cos\varphi \quad r \geq 0$
$y = r\,\sin\varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi)$



Alkalmazása origó középpontú kör leképezésére:

$x = r\,\cos\varphi \quad 0 \leq r \leq R$
$y = r\,\sin\varphi \quad 0 \leq \varphi < 2\,\pi$



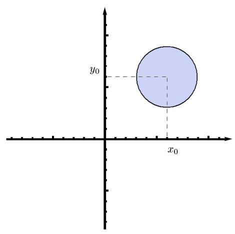
$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Tehát $|J| = r$

Ezáltal az origó középpontú, kör alakú tartományon történő integrálás helyett a transzformált függvényt egy $(0, R)$, $(0, 2\pi)$ téglalap alakú tartományon kell integrálni

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} f(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

Általános helyzetű kör leképezése:

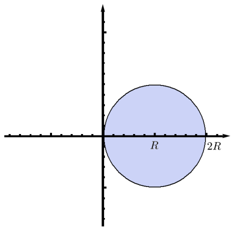


$x = x_0 + r\,\cos\varphi \quad 0 \leq r \leq R$
$y = y_0 + r\,\sin\varphi \quad 0 \leq \varphi < 2\,\pi$
$|J| = r$

Itt a polártranszformációból, és egy eltolásból áll az új változókra való áttérés.

Ennek speciális esete:

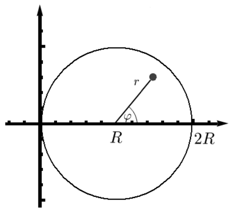
$$x^2 - 2\,Rx + y^2 \leq 0$$
$$(x-R)^2 + y^2 \leq R^2$$



Két lehetőségünk van:

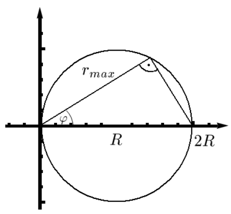
a.) Általános helyzetű körként:

$$\begin{array}{ll} x = x_0 + r\,\cos\varphi & 0 \leq r \leq R \\ y = y_0 + r\,\sin\varphi & 0 \leq \varphi < 2\,\pi \\ |\mathrm{J}| = r & \end{array}$$



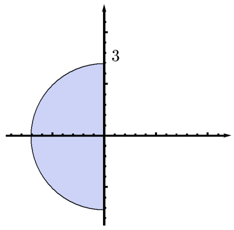
b.) Polártranszformációval

$$\begin{array}{ll} x = r\,\cos\varphi & 0 \leq r \leq 2R\cos\varphi \\ y = r\,\sin\varphi & -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ |J| = r & \end{array}$$



Példa. $\displaystyle\iint_T \cos(x^2+y^2)\ \mathrm{d}T = ? \qquad T: \quad x^2+y^2 \le 9 \quad , \qquad x \le 0$

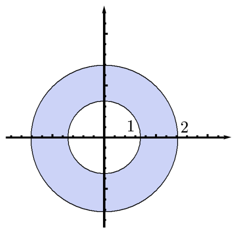
$x = r\,\cos\varphi \quad 0 \le r \le 3$
$y = r\,\sin\varphi \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi < \frac{3\,\pi}{2}$
$|J| = r$



$$\int_0^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\,\pi}{2}} \cos r^2 \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^3 r\ \cos r^2\ \varphi\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\,\pi}{2}}\ \mathrm{d}r$$
$$= \left(\frac{3\,\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^3 2r\ \cos r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\ \sin r^2\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}\sin 9$$

Példa. $\displaystyle\iint_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}T = ? \qquad T: \quad y \ge 0, \quad x^2+y^2 \ge 1, \quad x^2+y^2 \le 4$

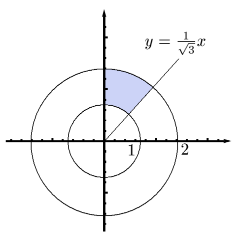
$x = r\,\cos\varphi \quad 1 \le r \le 2$
$y = r\,\sin\varphi \quad 0 \le \varphi < \pi$
$|J| = r$



$$\int_1^2 \int_0^\pi \frac{1}{(r^2)^2}\, r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_1^2 r^{-3}\ \varphi\Big|_{\varphi=0}^{\pi}\ \mathrm{d}r$$
$$= (\pi - 0)\int_1^2 r^{-3}\,\mathrm{d}r = \pi\ \frac{r^{-2}}{-2}\Bigg|_1^2 = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3\,\pi}{8}$$

Példa. $\displaystyle\iint_T 4x\,y^3\ \mathrm{d}T = ? \qquad T: \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$

$x = r\,\cos\varphi \quad 1 \le r \le 2$
$y = r\,\sin\varphi \quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
$|J| = r$



$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 4\,r\ \cos\varphi\,r^3\sin^3\varphi\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ \sin^3\varphi\ \ \frac{r^6}{6}\Bigg|_1^2\ \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{4}{6}\left(2^6 - 1\right)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{6}\left(2^6 - 1\right)\ \frac{\sin^4\varphi}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\left(2^6-1\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$$

Példa.

a.) Ismertesse a polártranszformációt! Írja fel, és számítsa ki a Jacobi determináns értékét!

b.) Írja le polárkoorsinátákkal az alábbi két tartományt!

$$T_1 : \quad x^2+y^2 \le R^2 \quad T_2 : \quad x^2+y^2-2x \le 0,\ y \ge 0,\ y \le x$$

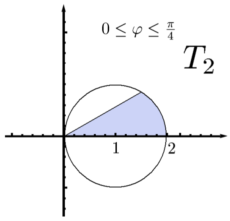
c.) $\displaystyle\iint\limits_{T_2} (2+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$

a.) $\begin{array}{l} x = r\,\cos\varphi \\ y = r\,\sin\varphi \quad r \ge 0, \quad \varphi \in [0, 2\,\pi) \end{array}$

$J = \det \frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

b.) A két tartomány:

$$\begin{array}{lll} T_1 : & 0 \le r \le R, & 0 \le \varphi < 2\pi \\ T_2 : & 0 \le r \le 2\,\cos\varphi, & 0 \le \varphi < \frac{\pi}{4} \end{array}$$



c.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\,\cos\varphi} (2+r\,\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(r^2+\frac{1}{3}\,r^3\sin\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{2\,\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2\varphi+\frac{8}{3}\cos^3\varphi\,\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \left(2\varphi+\sin 2\varphi-\frac{8}{3.4}\cos^4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{2}+1-\frac{1}{6}-\left(0+0-\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi+3}{2}
\end{aligned}$$

Példa.

a.) $\displaystyle\iint\limits_{T} \frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ? \qquad T = \left\{(x,y) : \quad x^2+y^2 \le R^2\right\}$

b.) $\displaystyle\iint\limits_{A} \frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ? \qquad A = \mathbb{R}^2$

a.) $\begin{array}{lll} x = r\,\cos\varphi & |J| = r & 0 \le r \le R \\ y = r\,\sin\varphi & & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(r^2+1\right)^{3/2}}\, r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^R 2r\left(r^2+1\right)^{-3/2}\,\mathrm{d}r \\ &= \pi\, \left.\frac{\left(r^2+1\right)^{-1/2}}{-1/2}\right|_0^R = -2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} - 1\right) \end{aligned}$$

b.)

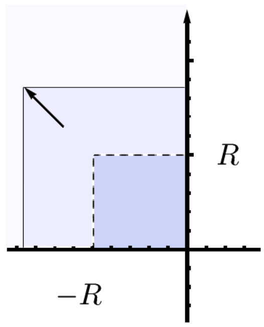
$$\mathcal{I} = \lim_{R\to\infty} \mathcal{I}_R = \lim_{R\to\infty} 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}\right) = 2\pi$$

Példa. $\displaystyle\iint_T e^{3x-2y}\,\mathrm{d}T = ? \qquad T:\, x \le 0,\; 0 \le y$

Improprius integrálról van szó.

$$\iint_T e^{3x-2y}\,\mathrm{d}T = \lim_{R\to\infty} \iint_{T_R} e^{3x-2y}\,\mathrm{d}T, \quad \textit{ahol}$$

$$T_R = \left\{ \begin{array}{ll} (x,y) & -R \le x \le 0 \\ & 0 \le y \le R \end{array} \right.$$



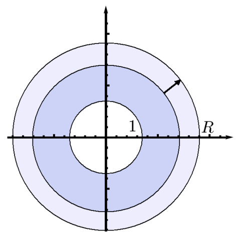
$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \lim_{R\to\infty} \mathcal{I}_R \\ \mathcal{I}_r &= \int_{-R}^0 \int_0^R e^{3x}\,e^{-2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-R}^0 e^{3x}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^R e^{-2y}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \left.\frac{e^{3x}}{3}\right|_{x=-R}^0 \cdot \left.\frac{e^{-2y}}{-2}\right|_{y=0}^R = \frac{1}{3}\left(1-e^{-3R}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-2R}-1\right) \\ \mathcal{I} &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-e^{-3R}\right)\left(1-e^{-2R}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Példa. $\displaystyle\iint_T e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}T = \mathcal{I} = ?$, *ahol* $\quad T: \quad x^2+y^2 \ge 1$

Itt is improprius integrálról van szó.

$$\mathcal{I} = \lim_{R\to\infty} \iint_{T_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}T\,, \textit{ahol} \quad T_r : \left\{(x,y) \quad 1 \le x^2+y^2 \le R^2\right\}$$

Polártranszformációval:



$$\begin{array}{lll} x = r\,\cos\varphi & |J| = r & T: \quad 1 \le r \le R \\ y = r\,\sin\varphi & & \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \lim_{R\to\infty} \int_1^R r\,e^{-r^2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi}\,\mathrm{d}r \\ &= (2\pi - 0)\,\frac{-1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_1^R -2r\,e^{-r^2}\,\mathrm{d}r = -\pi \lim_{R\to\infty} e^{-r^2}\Big|_1^R \\ &= \pi \lim_{R\to\infty}\left(e^{-R^2} - e^{-1}\right) = \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

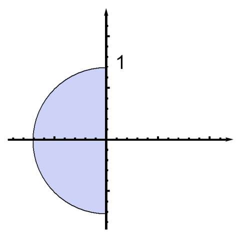
Példa. $\displaystyle\iint\limits_T \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}T = \mathcal{I} = ? \qquad T: \; x^2+y^2 \le 1, \quad x \le 0$

Improprius integrál ($x^2+y^2=1$-nél a nevező értéke nulla, így az integrandus itt nem korlátos)

$$\mathcal{I} = \lim_{\delta\to 0^+} \iint\limits_{T_\delta} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}T\,,\, \textit{ahol} \quad 0 \le x^2+y^2 \le 1-\delta\,, \quad x \le 0$$

Alkalmazzunk polártranszformációt:

$$\begin{array}{lll} x = r\,\cos\varphi & |J| = r & 0 \le r \le 1-\delta \\ y = r\,\sin\varphi & & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \end{array}$$



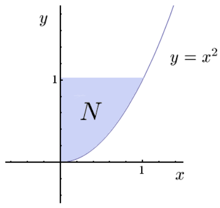
$$\begin{aligned} &\lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{\sqrt[3]{1-r^2}} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta} r\,\left(1-r^2\right)^{-1/3}\varphi\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\,\mathrm{d}r \\ =& \left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\frac{-1}{2}\lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta} -2r\,\left(1-r^2\right)^{-1/3}\,\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{2}\lim_{\delta\to+0}\frac{\left(1-r^2\right)^{2/3}}{2/3}\Bigg|_{r=0}^{1-\delta} \\ =& -\frac{3\pi}{4}\lim_{\delta\to+0}\left(\left(1-(1-\delta)^2\right)^{2/3}-1\right) = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Az integrálási sorrend felcserélése:

Példa. *Határozzuk meg* $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_{x^2}^1 x\, e^{-y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$ *értékét az integrálási sorrend felcserélésével!*

$\mathcal{I}$ értékét az N_x-en való integrálással definiáltuk, de $N_x = N_y$ miatt N_y-on való integrálással határozzuk meg.

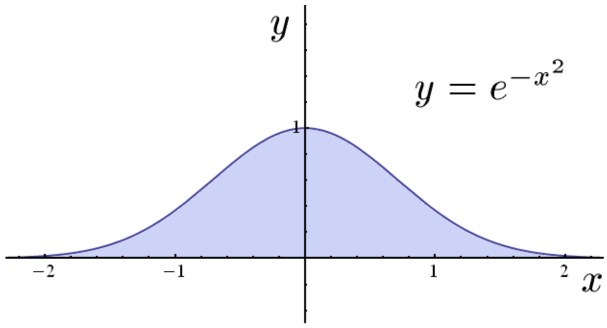
$$\begin{aligned} N = N_x \quad &: \quad 0 \le x \le 1 \\ &: \quad x^2 \le y \le 1 \\ N = N_y \quad &: \quad 0 \le y \le 1 \\ &: \quad 0 \le x \le \sqrt{y} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 \int_{x^2}^1 x\, e^{-y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \iint\limits_{N_x = N} x\, e^{-y^2}\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_{N = N_y} x\, e^{-y^2}\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x\, e^{-y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}\, e^{-y^2}\ \left[x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2} y\, e^{-y^2}\, \mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{4}\left[e^{-y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

2.4. Egy nevezetes integrál

Emlékeztető:

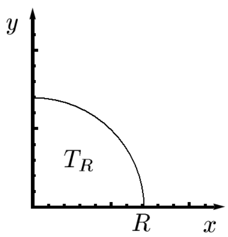


$$\int e^{-x^2} \mathrm{d}x \qquad \text{nem állítható elő zárt alakban véges sok elemi függvény felhasználásával.}$$

$$\int e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int 1 - x^2 + \frac{\left(-x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(-x^2\right)^3}{3!} + \cdots \mathrm{d}x = C + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} \pm \cdots \qquad \forall x.$$

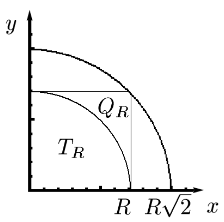
Nevezetes integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$



a.) T_R : $\qquad x^2 + y^2 \leq R^2 , \qquad x, y \geq 0$

$$\iint\limits_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R e^{-r^2} \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2} \right)$$



b.) Az integrál monotonitása miatt:

$$\begin{array}{ccccc}
\underbrace{\iint\limits_{T_R} e^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} & \leq & \underbrace{\iint\limits_{Q_R} e^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} & \leq & \underbrace{\iint\limits_{T_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \\
\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) & \leq & \int_0^R e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \cdot \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x & \leq & \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right) \\
\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) & \leq & \left(\int_0^R e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)^2 & \leq & \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right) \\
\Big\downarrow R \to \infty & & \Big\downarrow R \to \infty & & \Big\downarrow R \to \infty \\
\frac{\pi}{4} & \leq & \left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)^2 & \leq & \frac{\pi}{4}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

3. Hármas integrál transzformációja

Régi változók: x, y, z Új változók: u, v, w

A függvényrendszer: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\}$ V^*-ot k. egyértelműen képezi le V-re

Tegyük fel, hogy

$$J = \det \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} = \begin{vmatrix} \text{grad } x \\ \text{grad } y \\ \text{grad } z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

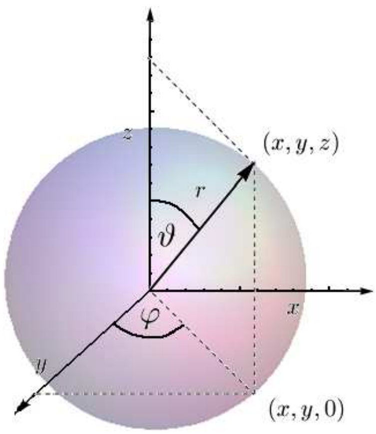
V^*-on, ekkor a leképezés kölcsönösen egyértlemű

ekkor:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V^*} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right) |\mathrm{J}|\ \ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

ahol az f és a Jacobi mátrix elemei folytonosságát feltételezzük.

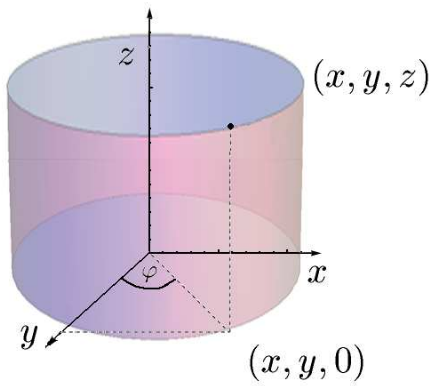
3.1. Gömbi koordináták



$$\begin{array}{ll} x = r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi & 0 \le r \\ y = r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z = r\,\cos\vartheta & 0 \le \vartheta \le \pi \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{J} &= \det \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (r,\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos\vartheta \begin{vmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) = r^2\sin\vartheta \\ |\mathrm{J}| &= \left|r^2\sin\vartheta\right| = r^2\sin\vartheta \quad ,mert \quad \vartheta \in [0,\pi] \end{aligned}$$

3.2. Henger koordináták



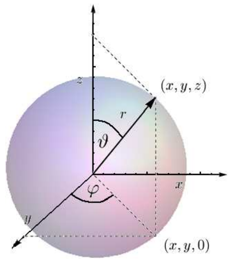
$x, y, z \to r, \varphi, z$

$$\begin{array}{ll} x = r\ \cos\varphi & \varphi \in [0, 2\pi) \\ y = r\ \sin\varphi & r \geq 0 \\ z = z & z \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \det \frac{\partial\,(x, y, z)}{\partial\,(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \quad , \qquad |\mathrm{J}| = r \end{aligned}$$

Példa. *Ismertesse a gömbi koordinátákat (ábrán mutassa meg a jelentésüket)! Írja fel a gömbi koordináták és a Descrates koordináták közötti kapcsolatot! Határozza meg a gömbi koordináták segítségével egy R sugarú gömb térfogatát* $V_{gömb} = ?$

$$\begin{array}{ll} \rho = r\,\sin\vartheta & \\ x = \rho\,\cos\varphi = r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi & \varphi \in [0, 2\pi) \\ y = \rho\sin\varphi = y = r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi & \vartheta \in [0, \pi) \\ z = r\,\cos\vartheta & r \geq 0 \end{array}$$



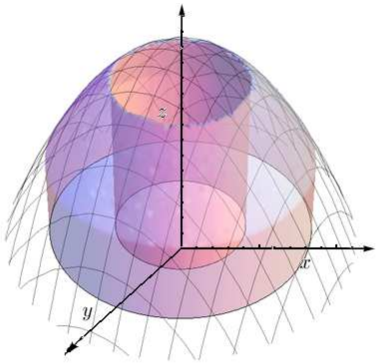
$$\begin{aligned} \mathrm{J} &= \det \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos\vartheta \begin{vmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) = r^2\sin\vartheta \\ |\mathrm{J}| &= \left|r^2\sin\vartheta\right| = r^2\sin\vartheta \quad ,mert \quad \vartheta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{array} \right\} \textit{ az origókörüli R sugarú gömb megadása gömbi koordinátákkal}$$

$$\begin{aligned} V_{gömb} &= \iiint\limits_V 1 \;\mathrm{d}V \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\left(-\cos\vartheta\right)\Big|_{\vartheta=0}^{\pi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= 2\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\left(2\pi - 0\right)\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4}{3}R^3\pi \end{aligned}$$

Példa. $\iiint\limits_V x^2 \, \mathrm{d}V = ?$ $\qquad V: \begin{array}{l} 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \\ 0 \le z \le 8 - x^2 - y^2 \end{array}$

$$\begin{array}{ll} x = r\,\cos\varphi & 0 \le z \le 8 - r^2 \\ y = r\,\sin\varphi & \varphi \in [0, 2\pi) \\ z = z & 1 \le r \le 2 \\ |\mathrm{J}| = r & \end{array}$$



$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{8-r^2} r^2 \cos^2\varphi \, r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2\varphi \, z\Big|_0^{8-r^2} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \left(8r^3 - r^5\right) \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_1^R \left(8r^3 - r^5\right) \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \, \mathrm{d}r$$

$$= \pi \left(2r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_1^2 = \pi \left(2^5 - \frac{2^6}{6} - 2 + \frac{1}{6}\right)$$

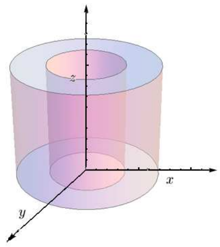
Példa. $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ? \quad , \qquad$ *ahol*

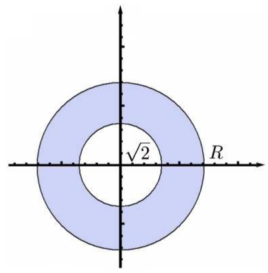
a.) $V = V_1 : \quad 2 \le x^2+y^2 \le R^2 \quad 1 \le z \le e$

b.) $V = V_2 : \quad 2 \le x^2+y^2 \quad 1 \le z \le e$

Hengerkoordinátás transzformáció

$$\begin{array}{ll} x = r\,\cos\varphi & \sqrt{2} \le r \le R \\ y = r\,\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = z & 1 \le z \le e \\ |\mathrm{J}| = r & \end{array}$$





a.)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R &= \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{2\pi}\int_1^e \frac{1}{r^4}\,r\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_{\sqrt{2}}^{R}\int_0^{2\pi} r^{-3}\,z\Big|_{z=1}^{e}\ \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= (e-1)\int_{\sqrt{2}}^{R} r^{-3}\varphi\Big|_{\varphi=0}^{2\pi}\ \mathrm{d}r = (e-1)(2\pi-0)\ \frac{r^{-2}}{-2}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{R} = \frac{2\pi}{-2}(e-1)\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

b.)

$$\mathcal{I} = \lim_{R\to\infty}\mathcal{I}_R = \lim_{R\to\infty} -\pi(e-1)\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e-1)$$