Info, Analízis(2) **10. ismétlő gyakorlat** **2008. ápr. 16.**

(A 10. héten csak a szerdai gyakorlatokon.)

1. (Pl.)

$$f(x,y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}} = y^3\, e^{-2x-1}; \qquad P_0(-\tfrac{1}{2}, 1)$$

a) $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!)

b) $\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a minimumhoz tartozó irányt!)

Megoldás:

$f'_x = y^3 e^{-2x-1}(-2), \qquad f'_x(-\tfrac{1}{2}, 1) = -2, \qquad f'_y = 3y^2 e^{-2x-1}, \qquad f'_y(-\tfrac{1}{2}, 1) = 3$

f'_x , f'_y mindenütt folytonos

$\Longrightarrow$ f totálisan deriválható P_0 egy környezetében (sőt mindenütt)

$\Longrightarrow$ P_0-ban $\exists$ minden irányban az iránymenti derivált és:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathit{grad}\, f(P_0)\ \underline{e} = |\mathit{grad}\, f(P_0)| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos\varphi, \qquad \text{és} \qquad |\underline{e}| = 1$$

$\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = |\mathit{grad}\, f(P_0)|$;

ha $\cos\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{e}$ iránya $\mathit{grad}\, f(P_0)$ irányával egyenlő

$\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = -|\mathit{grad}\, f(P_0)|$;

ha $\cos\varphi = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \underline{e}$ iránya $\mathit{grad}\, f(P_0)$ irányával ellentétes

Most: $\mathit{grad}\, f(P_0) = (-2, 3)$ tehát

$\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(-\frac{1}{2},1)} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$ ha $\underline{e}$ a $(-2, 3)$ vektor irányába mutat

$\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(-\frac{1}{2},1)} = -\sqrt{13},$ ha $\underline{e}$ a $(2, -3)$ vektor irányába mutat

2. (Pl.)

$$f(x,y) = \frac{5x - 3y}{2x + 4y} \qquad (x_0, y_0) = (0, 1)$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = ?$ $\quad \mathrm{d}f\,((x_0, y_0), (h, k)) = ?$

c) Milyen irányban lesz az (x_0, y_0) pontban az iránymenti derivált maximális? Adja meg ezt a maximális értéket is!

Megoldás:

a) Iterált limeszekkel cáélszerű megoldani.

$\ldots$

3. Pl.

$$f(x,y) = (2x-y)^2 \,+\, 4x^2 \,-\, 8y$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
c) Írja fel a függvény $P_0(1,2)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás:

$\ldots$

4. Pl.

$$f(x,y) = \sqrt[3]{4x^3 + 3y^2}$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

Megoldás:

$\ldots$

5. Pl.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(y^2+2x^2\right)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

Megoldás:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(y^2+2x^2)}{y^2+2x^2} \sqrt{y^2+2x^2} =$

$$= 1\cdot 0 = 0 = f(0,0)$$

Tehát f folytonos $(0,0)$-ban.

b) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\sin 2h^2}{\sqrt{2h^2}} - 0}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h^2}{2h^2} \sqrt{2}\, \frac{|h|}{h} = \nexists$$

c) Mivel $f'_x(0,0)\ \nexists$, f nem deriválható az origóban.

6. Pl.

$f(x,y,z) = x^2y + yz - 5z^2$, $\qquad P_0(0,10,1)$

a) $\operatorname{grad} f = ?$ Miért létezik a gradiens?

b) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -3\,\underline{j} + 4\,\underline{k}$

Megoldás:

a) $f'_x = 2xy$, $\quad f'_y = x^2 + z$, $\quad f'_z = y - 10z$
A parciálisok mindenütt léteznek és folytonosak $\Longrightarrow$ $\operatorname{grad} f$ mindenütt $\exists$.

b) $\operatorname{grad} f\ \exists\ K_{P_0}$-ban $\Longrightarrow$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot \underline{e} =$

$$= (0\,\underline{i} + \underline{j} + 0\,\underline{k})\cdot(0\,\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j} + \frac{4}{5}\underline{k}) = -\frac{3}{5}$$

7. Pl.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ -3, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(x,y) = ?$, $f'_y(x,y) = ?$ (Az origóban a definícióval dolgozzon!)

c) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,-1)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -5\,\underline{i} + \underline{j}$

d) Adja meg $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,-1)}$ és $\min \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,-1)}$ értékét!

e) Írja fel az $(1,-1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás:

a)

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3 \neq \frac{1}{2}$$

Tehát a keresett határérték nem létezik.

$\Longrightarrow$ A függvény nem folytonos az origóban.

b) Ha $(x,y) \neq (0,0)$: $\quad f'_x(x,y) = \dfrac{2x\,(2x^2+y^2) - (x^2-3y^2)\,4x}{(2x^2+y^2)^2}$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{2h^2} + 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{7}{2h} = \nexists$$

Ha $(x,y) \neq (0,0)$: $\quad f'_y(x,y) = \dfrac{-6y\,(2x^2+y^2) - (x^2-3y^2)\,2y}{(2x^2+y^2)^2}$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-3k^2}{k^2} + 3}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

c) A $(0,0)$ kivételével a parciálisok léteznek és folytonosak $\Longrightarrow$ $\mathrm{grad} f\ \exists$ itt.

Mivel $\mathrm{grad} f\ \exists\ K_{P_0}$-ban $\Longrightarrow$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathrm{grad} f(P_0)\cdot\underline{e} =$

$$= (\frac{14}{9}\,\underline{i} + \frac{14}{9}\underline{j}) \cdot (-\frac{5}{\sqrt{26}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\underline{j}) = -\frac{14}{9}\,\frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{14}{9}\,\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{-56}{9\cdot\sqrt{26}}$$

d) $$\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = |\mathrm{grad} f(P_0)| = \sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{14}{9}\right)^2} = \frac{14}{9}\,\sqrt{2}\,,$$

$$\text{ha} \quad \underline{e} = \frac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$$

$$\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = -\,|\mathrm{grad} f(P_0)| = -\,\frac{14}{9}\,\sqrt{2}\,,$$

$$\text{ha} \quad \underline{e} = -\,\frac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$$

e) $f(1,-1) = \dfrac{-2}{3}$

Az érintősík egyenlete így:

$$\frac{14}{9}\,(x-1) + \frac{14}{9}\,(y+1) - (z + \frac{2}{3}) = 0$$

8. Pl.

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{3y}}{x^4+1}$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,, \qquad f'_y(x,y) = ?$

b) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,0)} = ?\,,$ ha $\quad \underline{e} \parallel\ 2\,\underline{i} - 3\,\underline{j}$

c) Írja fel az $(1,0)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás:

. . .

9. Pl.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \ \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}\,, & \text{ha } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?
b) Írja fel az f'_x és f'_y függvényeket, ahol azok léteznek!
(Az origóban a definícóval dolgozzon!)

Megoldás:

. . .

10. Pl.

Számítsa ki az

$$A \ = \ g''_{xx}\,(2,1) \ + \ g''_{xy}\,(2,1) \ - \ 2\,g''_{yx}\,(2,1)$$

kifejezés értékét, ahol $g(x,y) \ = \ f(x^2-y)$ és f-nek a $t_0 = 3$ körüli másodrendű Taylor polinomja

$$T_2\,(t) \ = \ 1 \ - \ (t-3) \ + \ 5\,(t-3)^2$$

Megoldás:

$f'(3) = -1 \qquad\qquad f''(3) = 10$

$g'_x = f'(x^2-y)\;2x \qquad\qquad g''_{xx} = f''(x^2-y)\;2x\;2x + f'(x^2-y)\;2$

$g''_{xy} = f''(x^2-y)\;2x\;(-1) \ = \ g''_{yx}$

$g''_{xx}\,(2,1) = f''(3)\cdot 4^2 + f'(3)\cdot 2 = 158$

$g''_{xy}\,(2,1) = f''(3)\,(-4) = -40$

$A = 158 - (-40) = 198$

11. Pl.

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{x}{2y}$ -t $(y \neq 0)$ és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$-nal!

Adja meg $y \neq 0$ esetére az alábbi parciális deriváltakat!

$$f'_x(x,y) \ = ?\,, \qquad f'_y(x,y) \ = ?$$

$$f''_{xy}(x,y) \ = ?\,, \qquad f''_{yx}(x,y) \ = ?$$

Megoldás:

$\ldots$

12. Pl.

> $g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{2x}{y^2+1}$ -et és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$ -nal!
>
> $$f'_x(x,y) = ?\,, \qquad f'_y(x,y) = ?\,, \qquad f''_{xy}(x,y) = ?$$

Megoldás:

$\ldots$

Néhány példa a Taylor sorfejtéshez:

13. Pl.

> Határozza meg az alábbi függvénysorok összegfüggvényét és konvergenciasugarát!
>
> $$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k} = f_1(x)\,, \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k+1} = f_2(x)$$

Megoldás:

$\ldots$

14. Pl.

> Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!
>
> a) $f(x) = \dfrac{x}{4\,+\,8x^2}\,, \quad x_0 = 0$ b) $g(x) = \dfrac{1}{4\,+\,x}\,, \quad x_0 = -2$

Megoldás:

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{x}{4+8x^2} = \frac{x}{4}\,\frac{1}{1-(-2x^2)} = \frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-2x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-2)^n}{4}}_{=(-2)^{n-2}}\,x^{2n+1}$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = |-2x^2| \;=\; 2|x|^2 \;<\; 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}\;, \quad R_f = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) $$g(x) = \frac{1}{2+(x+2)} = \frac{1}{2}\;\frac{1}{1-(-\dfrac{x+2}{2})} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x+2}{2}\right)^n \;=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\;(x+2)^n$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left|-\frac{x+2}{2}\right| \;=\; \frac{|x+2|}{2} \;<\; 1 \quad \Longrightarrow \quad |x+2| < 2\;, \quad R_g = 2$$

15. Pl.

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) \;=\; \mathrm{ch}\,(4\,x^2)\;, \qquad\qquad g(x) = \sqrt[5]{1+3x}$$

$$h(x) = \frac{1}{1+3x}$$

Mindhárom esetben írja le az a_4 együttható értékét elemi műveletekkel!

Megoldás:

...

16. Pl.

a) Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

$a1)$ $\quad f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\;, \quad x_0 = 0$ $\qquad\qquad$ $a2)$ $\quad g(x) = \mathrm{e}^{-2x}\;, \quad x_0 = 4$

b) Számítsa ki az

$$\int_0^{0,1} f(x)\;\mathrm{d}x$$

integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt hatodfokú Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

Megoldás:

...

17. Pl.

$$f(x) = \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}} + \operatorname{sh} 2x - 2$$

a) A megfelelő Taylor sorfejtések segítségével írja fel az f függvény $x_0 = 0$ körüli ötödfokú Taylor polinomját!
(Az együtthatókat elemi műveletekkel adja meg, de nem kell kiszámítani!)

b) Határozza meg a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának konvergencia sugarát!

Megoldás:

...

18. Pl.

a) Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16+4x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!

b) $f^{(6)}(0) = ?$, $f^{(7)}(0) = ?$
(A sorfejtésből adjon választ és elemi műveletekkel adja meg az értékeket!)

Megoldás:

...