Analízis (2), 14. gyakorlat

Cauchy-Riemann egyenletek, differenciálhatóság, regularitás, harmonikus társ

1. feladat

$$v(x,y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$$

a) Adja meg a c paraméter értékét úgy, hogy $v(x,y)$ egy, az egész komplex számsíkon reguláris $f(z)$ komplex-változós függvény képzetes része legyen! ($c \in \mathbb{R}$)
b) $f'(1-2j) = ?$
Megoldás
a) $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$-nak kell teljesülni.

$$\begin{aligned} v'_x &= 2cx + 2y, & v''_{xx} &= 2c \\ v'_y &= 2x - 8y, & v''_{yy} &= -8 \end{aligned}$$

Tehát $\Delta v = 2c - 8 = 0$, ahonnan $c = 4$.
b)

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + jv'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) + jv'_x(x_0,y_0)$$
$$f'(1-2j) = v'_y(1,-2) + jv'_x(1,-2) = \big(2x - 8y + j(8x+2y)\big)\Big|_{(1,-2)} = 18 + 4j$$

2. feladat
Hol differenciálható, és hol reguláris az $f(z) = z^2\,\mathrm{Re}(z)$ függvény?
Megoldás

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2jxy)x = \underbrace{x^3 - xy^2}_{u(x,y)} + j\,\underbrace{2x^2y}_{v(x,y)},$$

ahonnan

$$\begin{aligned} u'_x &= 3x^2 - y^2, & v'_x &= 4xy, \\ u'_y &= -2xy, & v'_y &= 2x^2. \end{aligned}$$

A parciális deriváltak mindenütt folytonosak, tehát az $u(x,y)$, $v(x,y)$ függvények mindenütt totálisan differenciálhatók. A Cauchy–Riemann egyenletek és megoldásuk:

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 &= 2x^2 & &\text{és} & 4xy &= 2xy \\ x^2 - y^2 &= 0 & & & 2xy &= 0 \\ |x| &= |y| & & & x = 0 &\text{ vagy } y = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény csak az origóban differenciálható, és sehol sem reguláris.

3. feladat

$$u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y$$

Igazolja, hogy az $u(x,y)$ kétváltozós függvény az egész $\mathbb{R}^2$ síkon harmonikus függvény, és keresse meg a $v(x,y)$ harmonikus társfüggvényét, amellyel együtt az $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ függvény az egész komplex síkon reguláris komplex függvény. $(z = x + jy)$

Megoldás

Az u parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} u'_x &= 6x^2 - 6y^2 + 5, \qquad & u''_{xx} &= 12x, \\ u'_y &= -12xy - 2, \qquad & u''_{yy} &= -12x, \end{aligned}$$

tehát $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ az egész síkon.

A keresett $v(x,y)$-nek ismerjük a parciális deriváltjait:

$$v'_x = -u'_y = 12xy + 2, \qquad v'_y = u'_x = 6x^2 - 6y^2 + 5.$$

Az első egyenletet x szerint integrálva, majd az eredményt y szerint deriválva:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int (12xy + 2)dx = 6x^2y + 2x + C(y), \\ v'_y &= 6x^2 + C'(y) \end{aligned}$$

Ezt összevetve v'_y eredeti alakjával,

$$C'(y) = -6y^2 + 5, \quad \text{ahonnan} \quad C(y) = \int (-6y^2 + 5)dy = -2y^3 + 5y + c.$$

Tehát

$$\begin{aligned} v(x,y) &= 6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c, & (c \in \mathbb{R}) \\ f(z) &= 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y + j(6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c) & (z = x + jy) \end{aligned}$$

Eljárhatunk fordított sorrendben is, először v'_y-t integráljuk y szerint:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int (6x^2 - 6y^2 + 5)dy = 6x^2y - 2y^3 + 5y + C(x), \\ v'_x &= 12xy + C'(x) \end{aligned}$$

Ekkor $C'(x) = 2$, tehát $C(x) = 2x + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

Függvényértékek kiszámítása, egyenletek megoldása

4. feladat

$$z = e^{2-3j}, \qquad \operatorname{Re} z = ?, \qquad \operatorname{Im} z = ?, \qquad |z| = ?, \qquad \operatorname{arc} z = ?, \qquad \bar{z} = ?$$

Megoldás

$$z = e^2 e^{-3j} = e^2(\cos 3 - j\sin 3) = e^2\cos 3 + j(-e^2\sin 3),$$

tehát

$$\operatorname{Re} z = e^2\cos 3, \quad \operatorname{Im} z = -e^2\sin 3, \quad |z| = e^2, \quad \operatorname{arc} z = -3, \quad \bar{z} = e^{2+3j}.$$

5. feladat

a) $\ln(-\sqrt{3}+j) = ?$ *b)* $\ln(-3j) = ?$ *c)* $\operatorname{Ln}(-3j) = ?$

d) $\ln(-e) = ?$ *e)* $(\sqrt{2} - j\sqrt{2})^j = ?$

Megoldás
Emlékeztetőül:

$$\ln z = \ln|z| + j\operatorname{arc} z, \qquad -\pi \leq \operatorname{arc} z < \pi,$$
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

a) $\ln(-\sqrt{3}+j) = \ln 2 + j\frac{5\pi}{6}$.
b) $\ln(-3j) = \ln 3 - j\frac{\pi}{2}$.
c) $\operatorname{Ln}(-3j) = \ln 3 + j\big(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
d) $\ln(-e) = 1 - j\pi$.
e) $(\sqrt{2} - j\sqrt{2})^j = e^{j\ln(\sqrt{2}-j\sqrt{2})} = e^{j(\ln 2 - j\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\ln 2} = e^{\frac{\pi}{4}}(\cos\ln 2 + j\sin\ln 2)$.

6. feladat

a) $\sin\big(\frac{\pi}{2} + j\pi\big) = ?$ *b)* $\cos(1+2j) = ?$ *c)* $\operatorname{sh}(1+6j) = ?$

Megoldás
Emlékeztetőül:

$$\sin(jx) = j\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{sh}(jx) = j\sin x$$
$$\cos(jx) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{ch}(jx) = \cos x.$$

a)

$$\sin\Big(\frac{\pi}{2} + j\pi\Big) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\underbrace{\cos(j\pi)}_{\operatorname{ch}\pi} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\underbrace{\sin(j\pi)}_{j\operatorname{sh}\pi} = \operatorname{ch}\pi.$$

Tehát

$$\operatorname{Re}\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2} + j\pi\Big)\Big) = \operatorname{ch}\pi, \qquad \operatorname{Im}\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2} + j\pi\Big)\Big) = 0.$$

b)

$$\cos(1+2j) = \cos 1 \underbrace{\cos 2j}_{\operatorname{ch} 2} - \sin 1 \underbrace{\sin 2j}_{j \operatorname{sh} 2} = \cos 1 \operatorname{ch} 2 - j \sin 1 \operatorname{sh} 2.$$

c)

$$\operatorname{sh}(1+6j) = \operatorname{sh} 1 \underbrace{\operatorname{ch} 6j}_{\cos 6} + \operatorname{ch} 1 \underbrace{\operatorname{sh} 6j}_{j \sin 6} = \operatorname{sh} 1 \cos 6 + j \operatorname{ch} 1 \sin 6.$$

7. feladat
Oldjuk meg az $e^{j\bar{z}} + 5 = 0$ egyenletet!
Megoldás

$$\begin{aligned} e^{j\bar{z}} &= -5 \\ j\bar{z} &= \operatorname{Ln}(-5) = \ln 5 + j(-\pi + 2k\pi), \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ \bar{z} &= -\pi + 2k\pi - j \ln 5 \\ z &= -\pi + 2k\pi + j \ln 5 \end{aligned}$$

8. feladat
Keresse meg az

$$f(z) = \frac{1}{\sin(2z) + 3j}$$

izolált szinguláris pontjait!
Megoldás
Mivel a nevező mindenütt reguláris, így a szinguláris pontok a nevező zérushelyei:

$$\begin{aligned} \sin(2z) + 3j &= 0, && \text{felhasználjuk, hogy } \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \\ \frac{e^{2jz} - e^{-2jz}}{2j} + 3j &= 0, && / \cdot 2j \\ e^{2jz} - e^{-2jz} - 6 &= 0, && a := e^{2jz} \\ a - \frac{1}{a} - 6 &= 0, && / \cdot a \\ a^2 - 6a - 1 &= 0, && a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10} \\ 2jz &= \operatorname{Ln}(3 \pm \sqrt{10}). \end{aligned}$$

A két gyököt külön kezeljük:

$$\begin{aligned} 2jz_1 &= \operatorname{Ln}(3+\sqrt{10}) & 2jz_2 &= \operatorname{Ln}(3-\sqrt{10}) \\ 2jz_1 &= \ln(3+\sqrt{10}) + j2k\pi & 2jz_2 &= \ln|3-\sqrt{10}| + j(-\pi + 2k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ z_1 &= k\pi - \frac{j}{2}\ln(3+\sqrt{10}) & z_2 &= \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \frac{j}{2}\ln(\sqrt{10}-3) \end{aligned}$$

9. feladat
Keresse meg az $f(z) = \operatorname{sh} z$ függvény nullhelyeit!
1. Megoldás

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\Big(e^z - \frac{1}{e^z}\Big) = 0,$$

tehát $e^{2z} = 1$, ahonnan

$$\begin{aligned} 2z &= \operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + j(0 + 2k\pi) = j2k\pi, \\ z &= jk\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

2. Megoldás

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + jy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(jy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(jy) = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y = 0,$$

ami azt jelenti, hogy külön a valós és a képzetes rész is nulla:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{sh} x \cos y = 0, \\ v(x, y) &= \operatorname{ch} x \sin y = 0. \end{aligned}$$

A második egyenletben $\operatorname{ch} x \neq 0$, így $\sin y = 0$, tehát $y = k\pi$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$). Ez pedig azt jelenti, hogy $\cos y \neq 0$, tehát az első egyenletből $\operatorname{sh} x = 0$, azaz $x = 0$ következik. Tehát a megoldás:

$$z = jk\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

10. feladat (Ha marad rá idő...)
Hol differenciálható, és hol reguláris a következő függvény:

$$f(z) = \operatorname{ch}\left(\overline{2z}\right)$$

Megoldás

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(\overline{2z}\right) &= \operatorname{ch}(2x - j2y) = \operatorname{ch}(2x)\operatorname{ch}(j2y) - \operatorname{sh}(2x)\operatorname{sh}(j2y) = \\ &= \operatorname{ch}(2x)\cos(2y) - j\operatorname{sh}(2x)\sin(2y). \end{aligned}$$

Tehát a függvény valós és képzetes része:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{ch}(2x)\cos(2y), \\ v(x, y) &= -\operatorname{sh}(2x)\sin(2y). \end{aligned}$$

Látható, hogy u és v a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon totálisan differenciálható, mivel a parciális deriváltjaik léteznek és folytonosak mindenütt. A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} u'_x &= 2\operatorname{sh}(2x)\cos(2y), & v'_x &= -2\operatorname{ch}(2x)\sin(2y), \\ u'_y &= -2\operatorname{ch}(2x)\sin(2y), & v'_y &= -2\operatorname{sh}(2x)\cos(2y). \end{aligned}$$

A Cauchy–Riemann egyenletek:

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y, & 2\,\mathrm{sh}(2x)\cos(2y) &= -2\,\mathrm{sh}(2x)\cos(2y), \\ u'_y &= -v'_x, & -2\,\mathrm{ch}(2x)\sin(2y) &= 2\,\mathrm{ch}(2x)\sin(2y). \end{aligned}$$

A második egyenletből:

$$\mathrm{ch}(2x)\sin(2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = k\frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt felhasználva az első egyenletből $\mathrm{sh}(2x) = 0$, azaz $x = 0$ adódik.

Tehát az $f(z)$ függvény a $jk\frac{\pi}{2}$ pontokban ($k \in \mathbb{Z}$) differenciálható, és sehol sem reguláris.