

2.1 Feldobunk négy szabályos dobókockát .

- a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik kockán hatos van?
- b) Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyikken hatos van?

2.2 •• Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre  $P, K, S$ .

- a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?
- b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy  $P < K < S$ ?
- c) Mennyi  $\mathbf{P}\{P < K < S\}$ ?

2.3 A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 kártyalap van, minden színből 5. Kiosztunk 5 – 5 lapot.

- a) Még nem néztem meg a lapjaimat. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?
- b) Megnéztem a lapjaimat: két pirosat és három zöldet kaptam. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?

2.4 Vigyázat! Ebben a feladatban attól függően, milyen kísérlettel modellezzük a „véletlenszerű én” és a „véletlenszerű király” kiválasztását, különböző eredményeket kaphatunk. A megoldás része pontosan leírni azt is, hogy milyen kísérletben gondolkodunk és milyen feltevésekkel élünk.

- a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?
- b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

2.5 Két golyó mindegyike egymástól függetlenül  $1/2$ - $1/2$  valószínűséggel feketére vagy aranszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

- a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranszínű?
- b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

2.6 Egy internetes közösségi száj felhasználati körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám, vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg. Mi a valószínűsége, hogy Ádám köre 1, 2 illetve 3 főből áll akkor, amikor 4 fős a közösség?

2.7 •• Egy népszerű egyetemi szakra három fordulóban felvételiztetnek. Az első forduló egy alkalmassági vizsga, erről hazaküldik a jelentkezők 70%-át, a többiek továbbjutnak a következő fordulóba, ami egy írásbeli teszt. Az írásbeli teszten résztvevők 75%-át szórják ki, aki ezt az akadályt is sikerrel veszi, egy szóbeli elbeszélgetésen vehet részt, ahol a résztvevők ötödét válogatják be, őket veszik fel a szakra.

- a) A jelentkezők hányad részét veszik fel a szakra?
- b) Valakiről csak annyit tudunk, hogy túljutott az alkalmassági vizsgán. Mi a valószínűsége, hogy fel fogják venni?
- c) Tekintsük mindazokat a jelentkezőket, akiket végül nem vesznek fel a szakra. Hányad részüket szórták ki rendre az alkalmassági vizsgán, az írásbeli teszten és a szóbeli elbeszélgetésen?

2.8 Három szakács,  $A, B$  és  $C$ , egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak,  $A$  süti a sütemények 50%-át,  $B$  a 30%-át,  $C$  pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte  $A$ ?

2.9 •• A csavarokat 12 darabos csomagokban árusítják. Az üzletben kapható csomagok 80%-ában nincs hibás csavar, 15%-ában pontosan egy hibás csavar van, 5%-ában pontosan két hibás csavar van. A hibás csavarok helye a csomagban véletlenszerű. Veszek egy csomag csavart az üzletben és bosszankodva tapasztalom, hogy az első csavar, amit kiveszek a csomagból, hibás. Mi a valószínűsége, hogy a csomagban ott lapul még egy hibás csavar?

2.10 •• Egy doboz édesség krémmel töltött csokoládés bonbonokat tartalmaz, ezek lehetnek ét- vagy tejsokisak, a töltelékük pedig kávé- vagy mogyorókrém. A dobozban 6 kávékrémmel töltött étcsoki, 9 mogyorókrémmel töltött étcsoki és 14 kávékrémmel töltött tejsoki van. Hány mogyorókrémmel töltött tejsoki van a dobozban, ha tudjuk, hogy a csokoládé fajtája (ét- vagy tejsoki) és a töltelék egymástól függetlenek?

2.11 Egy genetikai rendellenesség a magzatok fél százalékát érinti. Egy „megbízhatónak számító” diagnosztikai eljárás a meglévő rendellenességet biztosan detektálja, míg rendellenesség hiányában 95% valószínűséggel a helyes negatív választ adja, 5% valószínűséggel pedig a hibás pozitív választ. Ha az eljárás eredménye pozitív, mi a valószínűsége, hogy magzatunknak tényleg megvan a rendellenessége?

2.13 Egy  $n$  elemű halmazból az  $A$  és  $B$  véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a  $2^n$  lehetséges részhalmaz közül.

- a) Mutassuk meg, hogy  $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ . (Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.)

b) Mutassuk meg, hogy  $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

2.14 •• Van egy nem (feltétlenül) szabályos érménk, mely  $p \in (0, 1)$  valószínűséggel esik a Fej, és  $q = 1 - p$  valószínűséggel esik az Írás oldalára. Kétszer egymás után feldobjuk az érmét. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej,  $B$  az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és  $C$  az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Vizsgáljuk meg, hogy  $p$  milyen értéke mellett lesznek ezek az események (a) páronként függetlenek; (b) teljesen függetlenek.

2.15 Adott egy  $n$  fős társaság. Jelölje  $A_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n$  azt az eseményt, hogy a társaság  $i$ -dik és  $j$ -dik tagjának ugyanaz a születésnapja.

a) Páronként független-e ez az  $\binom{n}{2}$  esemény?

b) Teljesen független-e ez az  $\binom{n}{2}$  esemény?

2.16 Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és  $p$  annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen  $P_n$  annak valószínűsége, hogy  $n$  nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy  $P_n$  kielégíti a

$$P_n = (2p - 1)P_{n-1} + (1 - p), \quad n \geq 1; \quad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy  $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n$  minden  $n \geq 0$  esetén.

2.17 Móricka élete első valószínűségszámítás vizsgáján  $\frac{1}{2}$  eséllyel megy át. Ha ezen megbukik, a következőre már kevesebbet tanul, ezen csak  $\frac{1}{3}$  a siker valószínűsége. Minél többször bukik meg, annál kevesebbet tanul, így  $k - 1$  sikertelen vizsga után már csak  $\frac{1}{k+1}$  az esélye, hogy a  $k$ -dik vizsgán átmeny. Ám Móricka kitaró, és a szabályzat szerint akárhányszor vizsgázhat. Mennyi a valószínűsége, hogy előbb-utóbb átmeny?

Bónusz Egy vadász 40 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 2 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság köbével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 10000 \cdot x^{-3} \quad (x \geq 40).$$

Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka  $1/5$  valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

2.18 Iszákos Iván a nap  $2/3$  részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsmában van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

2.19 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmat a többtől függetlenül Móricka  $p$ , Pistike pedig  $q$  valószínűséggel nyer meg, ahol  $p > 0$ ,  $q > 0$  és  $p + q = 1$ . A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmat megnyer.

a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmat?

b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmat, mint az utolsót?

c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmat Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

2.20 Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

2.21  $n$  dobozban elhelyezünk  $N$  golyót úgy, hogy mind az  $n^N$  elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy  $K$  golyó esik bele?

2.22 Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek  $2/3$ -ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen. Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.

Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mondott Béla, Béla tudja, hogy mit mondott Cili, Cili tudja, hogy mit mondott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

2.23 Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok, az  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  elemeivel számozott, golyóknak. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az 1, 2,  $\dots$ , 10 számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzzuk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a 11, 12,  $\dots$ , 20 számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzzuk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt  $2^{-n}$  perccel fogjuk az  $10n + 1$ ,  $10n + 2$ ,  $\dots$ ,  $10(n + 1)$  számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzzuk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjjelig. Bizonyítandó, hogy éjjelkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.